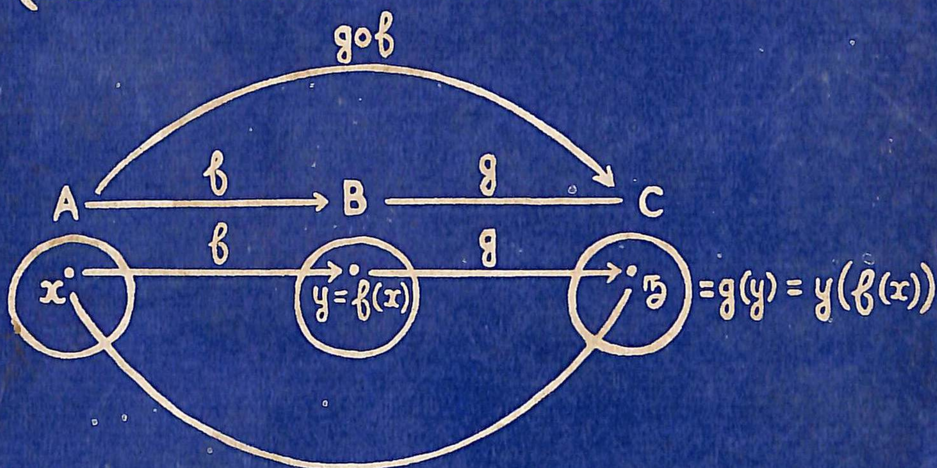
கணக் கொள்கையும் தொடர்புள்ள தலைப்புகளும்

(SET THEORY AND RELATED TOPICS)



து. பாஸ்கரன்



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—743

கணக் கொள்கையும் தொடர்புள்ள தலைப்புகளும்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

து. பாஸ்கரன், எம்.ஏ., பி.டி.,
கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,
வி. இ. நா. செந்திக் குமார நாடார் கல்லூரி,
விருதுநகர்.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—February, 1977

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 743

SET THEORY AND RELATED TOPICS

D. BASKARAN

Price Rs. 7-85

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed out of the Paper allotted by the Government of India.

Printed by
BHARANI PRESS,
11, Venkatathiri Naicken Street,
Kuyapettai, Madras-600 012.

பதிப்புரை

கணக் கொள்கையும் தொடர்புள்ள தலைப்புகளும் என்ற இந் நூல், தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 743ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் [illegible]ல் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 778 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல், மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

பக்கம்

நூலில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள குறியீடுகள்

$a = b$	—	a ஆனது b-க்குச் சமம்
$a \neq b$	—	a ஆனது b-க்குச் சமமன்று
$a < b$	—	a ஆனது b-யை விடச் சிறியது
$a \nless b$	—	a ஆனது b-யை விடச் சிறியதன்று
$a > b$	—	a ஆனது b-யை விடப் பெரியது
$a \ngtr b$	—	a ஆனது b-யை விடப் பெரியதன்று
$a \leqslant b$	—	a ஆனது b-யை விடச் சிறியது அல்லது b-க்குச் சமமானது
$a \geqslant b$	—	a ஆனது b-யை விடப் பெரியது அல்லது b-க்குச் சமமானது
$a \mid b$	—	a ஆனது b-யை வகுக்கிறது
$a \nmid b$	—	a ஆனது b-யை வகுக்காது
$n!$	—	அடுத்தடுத்த முதல் n இயற்கை எண்களின் பெருக்கம்
nCr	—	n வெவ்வேறு பொருள்களிலிருந்து தடவைக்கு r பொருள்களை எடுப்பதால் கிடைக்கும் சேர்வுகளின் எண்ணிக்கை
$x \parallel y$	—	x ஆனது y-க்கு இணை
$x \perp y$	—	x ஆனது y-க்குச் செங்குத்து
$\triangle ABC \parallel\!\mid \triangle DEF$	—	முக்கோணம் ABC, முக்கோணம் DEF-க்கு வடிவொப்பாகும்
$\triangle ABC \nparallel \triangle DEF$	—	முக்கோணம் ABC, முக்கோணம் D[illegible] வடிவொப்பாகாது
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$	—	முக்கோணம் ABC, முக்கோ[illegible] DEF-க்குச் சர்வசமம்
$\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$	—	முக்கோணம் ABC, முக்கோ[illegible] DEF-க்குச் சர்வசமமன்று
$\forall x$	—	எல்லா x-க்கும்
$\exists x$	—	ஒரு x இருக்கிறது

$\sim p$ — p அன்று

$p \wedge q$ — p மற்றும் q

$p \vee q$ — p அல்லது q

$p \longrightarrow q$ — p எனில் q

$p \longleftrightarrow q$ — p என்றால், என்றால்தான் q

$p \Longrightarrow q$ — p ஆனது qவை உணர்த்துகிறது

$p \Longleftrightarrow q$ — p ஆனது q-க்குச் சமத்துவமானது

$x \in A$ — x ஆனது A-ன் ஓர் உறுப்பு

$x \notin A$ — x ஆனது A-ன் உறுப்பன்று

N — இயற்கை எண்களின் கணம்

N_n — 1 முதல் n முடிய உள்ள இயற்கை எண்களின் கணம்

Z — முழு எண்களின் கணம்

Q — விகிதமுறு எண்களின் கணம்

$\mathbb{R}$ — மெய் எண்களின் கணம்

$\mathbb{C}$ — சிக்கல் எண்களின் கணம்

ϕ — வெற்றுக் கணம்

$\{\ \}$ — வெற்றுக் கணம்

U — முழுமைக் கணம்

$A \subset B$ — A ஆனது B-ன் ஓர் உட்கணம்

$A \not\subset B$ — A ஆனது B-ன் உட்கணமன்று

$A \supset B$ — A ஆனது Bயை உள்ளடக்கும் ஒரு கணம்

$A \not\supset B$ — A ஆனது Bயை உள்ளடக்கும் கணமன்று

2^A — A-ன் அடுக்குக் கணம்

$P(A)$ — A-ன் அடுக்குக் கணம்

$\{A_i\}_{i \in I}$ — குறியிடப்பட்ட ஒரு கணக் குடும்பம்

$A \cup B$ — A, B-களின் கூட்டுக் கணம்

$A \cap B$ — A, B-களின் இடைவெட்டுக் கணம்

$A - B$ — கணம் B-லிருந்து கணம் A-ன் வேறுபாடு

A' — கணம் A-ன் நிரப்பி

$A \triangle B$	—	A, B-களின் சமச்சீர் வேறுபாட்டுக்கணம்
$\bigcup_{i \in I} A_i$	—	பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூட்டுக் கணம்
$\bigcap_{i \in I} A_i$	—	பொதுப்படுத்தப்பட்ட இடைவெட்டுக் கணம்
$n(A)$	—	கணம் A-லுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
(a, b)	—	வரிசைப்பட்ட இரட்டை
(a, b, c)	—	வரிசைப்பட்ட மும்மை
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	—	வரிசைப்பட்ட n-மை
$A \times B$	—	A, B-களின் தேக்காட்டின் பெருக்குக் கணம்
$x R y$	—	x ஆனது y-யுடன் R-தொடர்பு கொண்டு உள்ளது
$x \not R y$	—	x ஆனது y-யுடன் R-தொடர்பு கொள்ளவில்லை
$x \equiv y$ (மட்டு m)	—	$(x-y)$ ஆனது m-ல் வகுபடுகிறது
R^{-1}	—	R-ன் நேர்மாறு தொடர்பு
$S \circ R$	—	R, S-களின் சேர்க்கைத் தொடர்பு
I_A	—	கணம் A-ல் முற்றொருமைத் தொடர்பு, கணம் A-ன் மீதான முற்றொருமைச் சார்பு
$[a]$	—	a-ன் சமத்துவக் கணம்
A/R	—	தொடர்பு R-ஆல் கிடைக்கும் A-ன் ஈவுக் கணம்
$f : A \longrightarrow B$	—	A-லிருந்து B-க்கு f என்ற சார்பு
$A \xrightarrow{f} B$	—	A-லிருந்து B-க்கு f என்ற சார்பு
$x \stackrel{f}{\longmapsto} y$	—	f-ல் x-ன் பிம்பம் y
$f(x)$	—	f-ல் x-ன் பிம்பம்
S_n	—	n-படி வரிசை மாற்றங்களின் கணம்
$A \sim B$	—	A ஆனது B-க்கு எண்ணளவில் சமத்துவமானது
$[a, b]$	—	அடைத்த இடைவெளி
$[a, b)$	—	அடைத்த-திறந்த இடைவெளி
$(a, b]$	—	திறந்த-அடைத்த இடைவெளி
(a, b)	—	திறந்த இடைவெளி

1. அளவையியலுக்கு அறிமுகம்

(Introduction to Logic)

1–1. கூற்றுகளும் திறந்த வாக்கியங்களும் (Statements and Open Sentences)

கணிதத்தைக் கற்பதற்கு அளவையியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் (Fundamental Principles of Logic) பெருந்துணை செய்வதால் அவற்றை இங்கே அறிமுகப்படுத்துவோம்.

வாக்கியங்களில் பல வகைகள் உண்டு. அவைகளில் நமக்குத் தேவையான இரு வகைகளை மட்டும் பார்ப்போம்.

1–1·1. வரையறை (Definition)

உண்மையான அல்லது பொய்யான, ஆனால் உண்மையும் பொய்யுமாக இராத எந்த ஓர் உறுதி வாக்கியமும் (declarative sentence) கூற்று (statement) எனப்படும்.

கீழ்வருபவை கூற்றுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

1–1·2. எடுத்துக்காட்டு

திருக்குறளை எழுதியவர் திருவள்ளுவர்.

1–1·3. எடுத்துக்காட்டு

இந்தியாவின் தலைநகர் பம்பாய்.

1–1·4. எடுத்துக்காட்டு

காவிரி ஓர் ஆறு.

1–1·5. எடுத்துக்காட்டு

$4 + 3 = 7$

1–1·6. எடுத்துக்காட்டு

$5 \times 8 \neq 8 \times 5$

1-1·7. எடுத்துக்காட்டு

$7 > 2$

1–1·3, 1–1·6 என்ற இரு எடுத்துக்காட்டுகளும் பொய்க் கூற்றுகள்; ஏனையவை உண்மைக் கூற்றுகள். கடைசி மூன்று எடுத்துக்காட்டுகளும் கணிதக் கூற்றுகள் (mathematical statements).

$7x = 28$ என்ற கணித வாக்கியம் ஒரு கூற்றல்ல. ஏனென்றால், x எந்தக் குறிப்பிட்ட எண்ணைக் (specific number) குறிக்கிறது எனத் தெரியும் வரை, $7x = 28$ என்பது உண்மையா, பொய்யா எனத் தீர்மானிக்க முடியாது. $x = 4$ எனில், $7x = 28$ என்பது ஓர் உண்மை வாக்கியம்; எனவே, ஒரு கூற்று. $x = 9$ எனில், $7x = 28$ என்பது ஒரு பொய் வாக்கியம்; எனவே ஒரு கூற்று.

ஒரு நபரை அல்லது ஒரு பொருளைக் குறிக்கும் எந்த ஒரு குறியீட்டையும் (symbol) ஒரு 'மாறி' (variable) என்கிறோம். சான்றாக, $x + 8 = 20$ என்ற வாக்கியத்தில் உள்ள x என்ற எழுத்து ஒரு 'மாறி' ஆகும். $x + 8 = 20$ என்பதில் x-க்குப் பதில் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணை இட்டால் அது ஒரு கூற்றாக மாறுகிறது. இத்தகைய வாக்கியங்களைப் பார்ப்போம்.

1–1·8. வரையறை

மாறியைக் கொண்ட, கூற்றல்லாத ஒரு வாக்கியத்தில் மாறிக்குப் பதில் ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் அல்லது பொருளின் பெயரை இடும்பொழுது, அது ஒரு கூற்றாக மாறினால், அது ஒரு திறந்த வாக்கியம் (open sentence) எனப்படும்.

ஒரு திறந்த வாக்கியத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகள் இருக்கலாம்.

கீழ்வருபவை திறந்த வாக்கியத்திற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

1–1·9. எடுத்துக்காட்டு

சிலப்பதிகாரத்தை எழுதியவர் x.

1–1·10. எடுத்துக்காட்டு

x-ன் ஆசிரியர் திருவள்ளுவர்.

1–1·11. எடுத்துக்காட்டு

$x - 4 = 10$

1–1·12. எடுத்துக்காட்டு

$x^2 - 7x + 12 = 0$

1–1·13. எடுத்துக்காட்டு

$x + 2y = 8$

1–1·14. எடுத்துக்காட்டு

$x + y = y + x$

இனிமேல் 'வாக்கியம்' என்ற சொல் ஒரு கூற்றை அல்லது ஒரு திறந்த வாக்கியத்தை மட்டுமே குறிக்கும்.

பயிற்சி 1 (அ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொன்றும் ஒரு கூற்று, திறந்த வாக்கியமா அல்லது இரண்டும் அல்லவா எனக் கூறுக:

1. எல்லாப் பசுக்களும் கொம்புடையவை.
2. சந்திரன் ஒரு நட்சத்திரம்.
3. $x < 7$
4. அறஞ் செய விரும்பு.
5. ஒளியின் வேகம் என்ன ?
6. பூமி தட்டையானது.
7. $x^2 - 3 = 1$
8. $9 = 5$
9. தமிழே, என்னே உன் சீரிளமை !
10. பாரி ஒரு வள்ளல்.
11. கடுகு சிறிதானாலும்.
12. ஆறும் ஐந்தும் முப்பதா?
13. இந்திய நாடாளுமன்றம் புது தில்லியில் உள்ளது.
14. x ஆனது 30-ன் ஒரு காரணி.
15. வேங்கடம் ஒரு மலை.
16. $4 + 11$
17. வாழிய செந்தமிழ், வாழ்க நற்றமிழர்.
18. $(x + y) + z = x + (y + z)$
19. பாண்டியனின் கொடி மீன் கொடி.
20. தமிழ் நாட்டின் நெற்களஞ்சியம் எது ?

21. காவிரி ஓர் ஆறல்ல.

22. கற்க கசடற கற்பவை.

விடைகள்

1.	கூற்று.	12.	இரண்டும் அல்ல.
2.	கூற்று.	13.	கூற்று.
3.	திறந்த வாக்கியம்.	14.	திறந்த வாக்கியம்.
4.	இரண்டும் அல்ல.	15.	கூற்று.
5.	இரண்டும் அல்ல.	16.	இரண்டும் அல்ல.
6.	கூற்று.	17.	இரண்டும் அல்ல.
7.	திறந்த வாக்கியம்.	18.	திறந்த வாக்கியம்.
8.	கூற்று.	19.	கூற்று
9.	இரண்டும் அல்ல.	20.	இரண்டும் அல்ல.
10.	கூற்று.	21.	கூற்று.
11.	இரண்டும் அல்ல.	22.	இரண்டும் அல்ல.

1–2. அளவுபடுத்திகள் (Quantifiers)

ஒரு திறந்த வாக்கியத்தில் வரும் மாறிக்குப் பதில் ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் அல்லது பொருளின் பெயரை இட்டு அதை ஒரு கூற்று ஆக்கலாம் எனப் பார்த்தோம். ஒரு திறந்த வாக்கியத்தைக் கூற்றாக்க இன்னுமொரு வழி உண்டு. அதைப் பார்ப்போம்.

'$x^2 - 3x + 2 = 0$' என்பது ஒரு திறந்த வாக்கியம். ஆனால், '$x^2 - 3x + 2 = 0$ எனும்படி x என்ற ஓர் எண் இருக்கிறது' என்பது ஒரு கூற்று. மேலும் இது ஓர் உண்மைக் கூற்று.

'$x - 5 = 12$' என்பது ஒரு திறந்த வாக்கியம். ஆனால், 'எல்லா எண்கள் x-க்கும் $x - 5 = 12$' என்பது ஒரு கூற்று. மேலும், இது ஒரு பொய்க் கூற்று.

இந்த விதமாக, '$x^2 - 3x + 2 = 0$' என்ற திறந்த வாக்கியத்திற்குப் பின்னால், 'எனும்படி x என்ற ஓர் எண் இருக்கிறது' என்ற தொடரைச் சேர்த்தாலும்,

'$x - 5 = 12$' என்ற திறந்த வாக்கியத்திற்கு முன்னால் 'எல்லா எண்கள் x-க்கும்' என்ற தொடரைச் சேர்த்தாலும்,

'$x^2 - 3x + 2 = 0$', '$x - 5 = 12$' என்ற இரு திறந்த வாக்கியங்களும் கூற்றுகளாக மாறிவிடுகின்றன.

நாம் மேலே குறிப்பிட்ட இரு தொடர்களும் 'அளவு என்ற கருத்தைத் தெரிவிப்பதால்', அதாவது 'மாறியை அளவுபடுத்துவதால்' 'எல்லா', 'இருக்கிறது அல்லது சில' என்ற சொற்களை அளவுபடுத்திகள் (quantifiers) என்கிறோம்.

'எல்லா' என்ற அளவுபடுத்தியை 'முழுமை அளவுபடுத்தி' (universal quantifier) என்றும், 'இருக்கிறது (சில)' என்ற அளவுபடுத்தியை, 'இருத்தல் அளவுபடுத்தி' (existential quantifier) என்றும் வழங்குகிறோம்.

எல்லா (ஒவ்வொரு, ஏதேனும் ஒரு) என்ற முழுமை அளவுபடுத்தியை '$\forall$' என்ற குறியால் குறிக்கிறோம். எனவே,

'எல்லா x-க்கும், $x + 5 = 5 + x$' என்ற கூற்றை,

'$\forall x,\ x + 5 = 5 + x$' என எழுதலாம்.

இருக்கிறது (சில) என்ற இருத்தல் அளவுபடுத்தியை '$\exists$' என்ற குறியால் குறிக்கிறோம், எனவே,

'$x^2 - 5x + 6 = 0$ எனும்படி ஒரு x இருக்கிறது' என்ற கூற்றை,

'$x^2 - 5x + 6 = 0 \ni \exists x$' என எழுதலாம். இதில் வரும் '$\ni$' என்ற குறியானது 'எனும்படி' என்பதைக் குறிக்கிறது. இந்தக் கூற்றைப் பொதுவாக,

'$\exists x \ni x^2 - 5x + 6 = 0$' என எழுதுகிறோம்.

பயிற்சி 1 (ஆ)

முழுமை அளவுபடுத்தி, இருத்தல் அளவுபடுத்தி என்பவற்றுள் ஒவ்வொன்றையும் பயன்படுத்திக் கீழ்வரும் ஒவ்வொரு திறந்த வாக்கியத்தையும் ஒரு கூற்றுக்குக. கிடைத்த கூற்று உண்மையா, பொய்யா எனக் கூறுக.

1. $4x = 8$
2. $6 + x = x + 6$
3. $x + 2 > 9$

4. $5x = 4 + x$

5. $3x + 4x = 7x$

6. $x + 3 = 3$

7. $4x + 5x = 10x$

8. $x = x$

விடைகள்

1. $\forall x,\ 4x = 8$ என்பது பொய்.
   $\exists x \ni 4x = 8$ என்பது உண்மை.

2. $\forall x,\ 6 + x = x + 6$ என்பது உண்மை.
   $\exists x \ni 6 + x = x + 6$ என்பது உண்மை.

3. $\forall x,\ x + 2 > 9$ என்பது பொய்.
   $\exists x \ni x + 2 > 9$ என்பது உண்மை.

4. $\forall x,\ 5x = 4 + x$ என்பது பொய்.
   $\exists x \ni 5x = 4 + x$ என்பது உண்மை.

5. $\forall x,\ 3x + 4x = 7x$ என்பது உண்மை.
   $\exists x \ni 3x + 4x = 7x$ என்பது உண்மை.

6. $\forall x,\ x + 3 = 3$ என்பது பொய்.
   $\exists x \ni x + 3 = 3$ என்பது உண்மை.

7. $\forall x,\ 4x + 5x = 10x$ என்பது பொய்.
   $\exists x \ni 4x + 5x = 10x$ என்பது உண்மை.

8. $\forall x,\ x = x$ என்பது உண்மை.
   $\exists x \ni x = x$ என்பது உண்மை.

1–3. இணைப்பிகள், தனி வாக்கியங்கள், கூட்டு வாக்கியங்கள் (Connectives, Simple Sentences and Compound Sentences)

கணிதத்திலும் மற்றப் பாடங்களிலும் நாம் பல வாக்கியங்களைச் சந்திக்கிறோம். நமக்குத் தெரிந்த வாக்கியங்களை மாற்றி அமைத்தோ அல்லது ஒன்று சேர்த்தோ புதிய வாக்கியங்கள் அமைக்கலாம். இப்படி வாக்கியங்களை ஒன்று சேர்க்கும்பொழுது அவைகளுக்கிடையே தொடர்பு உண்டா இல்லையா எனப் பார்ப்பதில்லை. வாக்கியங்களை மாற்றி அமைக்க அல்லது ஒன்று

சேர்க்கத் துணை செய்பவைகளை வாக்கிய இணைப்பிகள் (sentential connectives) அல்லது சுருக்கமாக இணைப்பிகள் (connectives) என்கிறோம்.

1–3·1. வரையறை

'அல்ல, மற்றும், அல்லது, என இருந்தால் அப்பொழுது, என இருந்தால் இருந்தால்தான்' என்ற ஐந்தும் இணைப்பிகள் எனப் படும்.

'அல்ல' என்பதற்குப் பதிலாக 'இல்லை' என்ற சொல்லையும் பயன்படுத்தலாம்.

'என இருந்தால் அப்பொழுது' என்ற இணைப்பியைக் கீழ்க் கண்டவாறும் எழுதுகிறோம்:

ஆல் அப்பொழுது,

எனில் அப்பொழுது,

என்றால் அப்பொழுது,

ஆனால் அப்பொழுது,

ஆயின் அப்பொழுது,

ஆக இருந்தால் அப்பொழுது.

'என இருந்தால் இருந்தால்தான்' என்ற இணைப்பியைக் கீழ்க் கண்டவாறும் எழுதுகிறோம்:

என்றால் என்றால்தான்,

ஆக இருந்தால் இருந்தால்தான்,

ஆனால் ஆனால்தான்.

1–3·2. வரையறை

இணைப்பிகளே இல்லாத எந்த ஒரு வாக்கியத்தையும் ஒரு தனி வாக்கியம் (simple sentence) என்கிறோம்.

கீழ்வருபவை தனி வாக்கியத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

1–3·3. எடுத்துக்காட்டு

காவிரி ஓர் ஆறு.

1–3·4. எடுத்துக்காட்டு

3 ஓர் இரட்டை எண்

1–3·5. எடுத்துக்காட்டு

$5 + 4 = 10$

1–3·6. எடுத்துக்காட்டு

$x + 2 = 6$

1–3·7. எடுத்துக்காட்டு

$7 \times 8 = 8 \times 7$

1–3·8. எடுத்துக்காட்டு

$y < 9$

1–3·9. வரையறை

குறைந்தது ஓர் இணைப்பியைக் கொண்ட எந்த ஒரு வாக்கியத்தையும் ஒரு கூட்டு வாக்கியம் (compound sentence) என்கிறோம்.

கீழ்வருபவை கூட்டு வாக்கியத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

1–3·10. எடுத்துக்காட்டு

சிலப்பதிகாரத்தின் ஆசிரியர் சாத்தனார் அல்ல.

1–3·11. எடுத்துக்காட்டு

காக்கை கறுப்பாக இல்லை.

1–3·12. எடுத்துக்காட்டு

$8 + 3 \neq 3 + 8$

1–3·13. எடுத்துக்காட்டு

இமயம் ஒரு மலை, மற்றும் இந்தியாவின் தலைநகர் பம்பாய்.

1–3·14. எடுத்துக்காட்டு

4 ஓர் ஒற்றை எண், மற்றும் $7 < 10$.

1–3·15. எடுத்துக்காட்டு

காக்கை கறுப்பு, மற்றும் கடல்நீர் உப்பு.

1–3·16. எடுத்துக்காட்டு

வள்ளலார் ஒரு புலவர் அல்லது $5 + 3 = 8$.

1–3·17. எடுத்துக்காட்டு

5 ஒரு பகு எண் அல்லது 6 ஒரு பகு எண்.

1–3·18. எடுத்துக்காட்டு

பூம்புகார் ஒரு துறைமுகம் அல்லது தமிழ் நாட்டின் தலைநகர் மதுரை.

1–3·19. எடுத்துக்காட்டு

ஒரு முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமாக இருந்தால், அப்பொழுது அது ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் ஆகும்.

1–3·20. எடுத்துக்காட்டு

$x > y$ எனில், அப்பொழுது $y \neq x$

1–3·21. எடுத்துக்காட்டு

இன்று மழை பெய்தால், அப்பொழுது கால்பந்துப் போட்டி ஒத்திவைக்கப்படும்.

1–3·22. எடுத்துக்காட்டு

இன்று ஞாயிற்றுக்கிழமையாக இருந்தால் இருந்தால்தான், நாளை திங்கட்கிழமை.

1–3·23. எடுத்துக்காட்டு

ஒரு முக்கோணம் சமகோண முக்கோணமாக இருந்தால் இருந்தால்தான், அது ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

சில கூட்டு வாக்கியங்களில் இணைப்பியானது வெளிப்படையாகத் தெரியாமல் இருக்கலாம். சான்றாக, 'குயிலின் நிறம் கறுப்பு, ஆனால் அதன் குரல் இனிமையானது' என்ற கூட்டுவாக்கியத்தில் 'மற்றும்' என்பதற்குப் பதிலாக 'ஆனால்' வந்துள்ளது.

'குயிலின் நிறம் கறுப்பு; அதன் குரல் இனிமையானது' என்ற கூட்டு வாக்கியத்தில் 'மற்றும்' என்ற இணைப்பியானது ';' என்ற அரைப் புள்ளியால் உணர்த்தப்பட்டுள்ளது.

வாக்கியங்களைப் பொதுவாக p, q, r என்ற எழுத்துகளால் குறிக்கிறோம். இணைப்பிகளுக்குரிய குறியீடுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

1–3·24. இணைப்பிகளுக்குரிய குறியீடுகளின் அட்டவணை.

இணைப்பி	குறியீடு
அல்ல	$\sim$
மற்றும்	$\wedge$
அல்லது	$\vee$
என இருந்தால் அப்பொழுது	$\rightarrow$
என இருந்தால் இருந்தால்தான்	$\leftrightarrow$

இனி, கூட்டு வாக்கியங்களைக் குறியீட்டு முறையில் எப்படி எழுதுவதென்பதற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் பார்ப்போம்.

1–3·25. எடுத்துக்காட்டு

'ஆறும் ஐந்தும் பத்து' என்பதை p குறிக்குமானால், 'ஆறும் ஐந்தும் பத்தல்ல' என்பதை $\sim p$ குறிக்கும்.

1–3·26. எடுத்துக்காட்டு

'7 ஒரு பகா எண் (prime number)' என்பதை p-ம், '4 ஓர் ஒற்றை எண் (odd number) என்பதை q-ம் குறித்தால்,

$p \wedge q$ என்பது '7 ஒரு பகா எண் மற்றும் 4 ஓர் ஒற்றை எண் என்பதையும்,

$p \vee q$ என்பது '7 ஒரு பகா எண் அல்லது 4 ஓர் ஒற்றை எண்' என்பதையும்,

$p \vee (\sim q)$ என்பது '7 ஒரு பகா எண் அல்லது 4 ஓர் ஒற்றை எண் அல்ல' என்பதையும் குறிக்கும்.

1–3·27. எடுத்துக்காட்டு

'கண்ணன் பாடினன்', 'செல்வி ஆடினள்' என்பவைகளை முறையே p-ம், q-ம் குறித்தால், $p \longrightarrow q$ என்பது 'கண்ணன் பாடினன் என்றால் அப்பொழுது செல்வி ஆடினள்' என்பதையும், $p \longleftrightarrow q$ என்பது 'கண்ணன் பாடினன் என்றால் என்றால்தான் செல்வி ஆடினள்' என்பதையும் குறிக்கும்.

1–3·28. எடுத்துக்காட்டு

$8>5$, $5>2$, $8=2$ என்ற மூன்றையும் முறையே p, q, r என்பவை குறித்தால், '$8>5$ மற்றும் $5>2$ எனில், அப்பொழுது $8 \neq 2$' என்பதை $(p \wedge q) \longrightarrow (\sim r)$ குறிக்கும்.

கூட்டு வாக்கியங்களைக் குறியீட்டு முறையில் எழுதும்பொழுது ஐயம் ஏற்படாதவாறு தேவையான இடங்களில் பொருத்தமான அடைப்புகளை இடவேண்டும். $\sim$ என்ற இணைப்பி ஒரு வாக்கியத்தை மாற்றி அமைக்கவே பயன்படுவதால், இதனருகே இன்னுமொரு இணைப்பி வரும்பொழுது ஐயம் ஏற்படாது. ஆகவே, அவ்வேளைகளில் அடைப்புகள் தேவை இல்லை.

எனவே,

$p \wedge (\sim q)$ என்பதை $p \wedge \sim q$ எனவும்,

$p \vee (\sim q)$ என்பதை $p \vee \sim q$ எனவும்,

$p \longrightarrow (\sim q)$ என்பதை $p \longrightarrow \sim q$ எனவும்,

$p \longleftrightarrow (\sim q)$ என்பதை $p \longleftrightarrow \sim q$ எனவும்,

$\sim (\sim p)$ என்பதை $\sim \sim p$ எனவும் எழுதுகிறோம்.

ஒரு கூட்டு வாக்கியத்தில் ஒரே ஓர் இணைப்பி மட்டும் இருந்தால், அதன் வடிவத்தை, கூட்டு வாக்கியங்களின் ஓர் அடிப்படை வடிவம் (basic form) என்கிறோம். மொத்தத்தில் ஐந்து இணைப்பிகள் உள்ளதால், ஐந்து அடிப்படை வடிவங்கள் இருக்கின்றன. அவைகளின் வரையறைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன:

1–3·29. வரையறை

p, q என்பவை இரு வாக்கியங்கள் என்க. அப்பொழுது

(a) $\sim p$ என்பது p-ன் எதிர்மறை (negation) எனப்படும். இதை p அல்ல எனப் படிக்கிறோம்.

(b) $p \wedge q$ என்பது p, q களின் இணைப்பு (conjunction) எனப்படும். இதை p மற்றும் q எனப் படிக்கிறோம்.

(c) $p \vee q$ என்பது p, q களின் பிரிப்பு (disjunction) எனப்படும். இதை p அல்லது q எனப் படிக்கிறோம்.

(d) $p \longrightarrow q$ என்பது நிபந்தனை வாக்கியம் (conditional sentence) எனப்படும். இதை,

p என இருந்தால் அப்பொழுது q,

p எனில் அப்பொழுது q,

p என்றால் அப்பொழுது q,

p ஆனால் அப்பொழுது q,

p ஆக இருந்தால் அப்பொழுது q,

q என இருந்தால்தான் p,

q ஆனது p-க்கு வேண்டிய நிபந்தனை (necessary condition),

அல்லது

p ஆனது q-க்குப் போதிய நிபந்தனை (sufficient condition) எனப் படிக்கிறோம்.

(e) $p \longleftrightarrow q$ என்பது இரு நிபந்தனை வாக்கியம் (biconditional sentence) எனப்படும். இதை

p எனில் q, q எனில் p,

p என இருந்தால் இருந்தால்தான் q,

p ஆக இருந்தால் இருந்தால்தான் q,

p என்றால் என்றால்தான் q,

அல்லது

q ஆனது p-க்கு வேண்டிய—போதிய நிபந்தனை (necessary and sufficient condition) எனப் படிக்கிறோம்.

பயிற்சி 1 (இ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியமும் தனி வாக்கியமா அல்லது கூட்டு வாக்கியமா எனக் கூறுக. கூட்டு வாக்கியம் எனில், அதில் உள்ள இணைப்பி(கள்) எது (எவை) ?

1. $3 + 5 \neq 5 + 3$
2. $7 + 3 = 10$ மற்றும் $4 - 3 = 2$
3. $4 + 4 = 4$ எனில், அப்பொழுது $5 + 3 = 8$.
4. 11 ஒரு பகு எண்.
5. 4 ஓர் இரட்டை எண் அல்லது $x = 2$.

6. காக்கை கறுப்பாக இருந்தால் இருந்தால்தான், கடல் நீர் உப்புக் கரிக்கும்.

7. $5 + 7 = 12$ எனில், அப்பொழுது $5 \times 7 \neq 35$.

8. ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு பக்கங்களும் சமமாக இருந்தால், அப்பொழுது அது ஒரு சாய்சதுரம் அல்லது அது ஒரு சதுரம்.

9. $4 > 3$.

10. 7 ஒரு பகா எண் அல்ல அல்லது $5 \times 2 = 16$.

11. 8 ஓர் ஒற்றை எண் அல்ல.

12. x ஓர் ஒற்றை எண்ணாக இருந்தால் இருந்தால்தான், x^2 ஓர் ஒற்றை எண்.

13. $4 \times 5 = 22$ மற்றும் $6 \times 5 \neq 30$.

14. $6 + 3 = 6$ மற்றும் $7 + 5 \neq 11$ எனில், அப்பொழுது $4 - 3 = 1$.

விடைகள்

1. கூட்டு வாக்கியம்; $\sim$
2. கூட்டு வாக்கியம் ; $\wedge$
3. கூட்டு வாக்கியம் ; $\rightarrow$
4. தனி வாக்கியம்.
5. கூட்டு வாக்கியம்; $\vee$
6. கூட்டு வாக்கியம்; $\leftrightarrow$
7. கூட்டு வாக்கியம்; $\rightarrow, \sim$
8. கூட்டு வாக்கியம்; $\rightarrow, \vee$.
9. தனி வாக்கியம்.
10. கூட்டு வாக்கியம்; $\sim, \vee$
11. கூட்டு வாக்கியம்; $\sim$
12. கூட்டு வாக்கியம் ; $\leftrightarrow$
13. கூட்டு வாக்கியம்; $\wedge, \sim$
14. கூட்டு வாக்கியம்; $\wedge, \sim, \rightarrow$

1–4. எதிர்மறை (Negation)

ஒரு கூற்றிற்கு உண்மை, பொய் என்ற இரண்டுள் ஏதேனும் ஒன்றுதான் பொருந்தும். அவற்றுள் எது பொருந்துமோ அதை அக் கூற்றின் உண்மை மதிப்பு (truth value) என்கிறோம். எனவே, ஓர் உண்மைக் கூற்றின் உண்மை மதிப்பு உண்மை ஆகும்; ஒரு பொய்க் கூற்றின் உண்மை மதிப்பு பொய் ஆகும். சான்றாக,

'7 ஒரு பகா எண்' என்ற கூற்றின் உண்மை மதிப்பு உண்மை ஆகும்.

'4 ஓர் ஒற்றை எண்' என்ற கூற்றின் உண்மை மதிப்பு பொய் ஆகும்.

உண்மை, பொய் என்பவற்றை முறையே 'உ', 'பொ' எனச் சுருக்கமாக எழுதுவதும் உண்டு.

ஒரு கூட்டுக் கூற்று (compound statement) உண்மையானதா அல்லது பொய்யானதா என்பது அது எந்தத் தனிக் கூற்றுகளால் (simple statements) ஆனதோ அவைகளின் உண்மை மதிப்புகளைப் பொறுத்தது. எனவே, ஐந்து அடிப்படைக் கூட்டுக் கூற்றுகளின் உண்மை மதிப்புகளை முதலில் தெரிந்து கொள்வோம்.

1–4·1. வரையறை

p ஒரு பொய் வாக்கியமாக இருந்தால் இருந்தால்தான் அதன் எதிர்மறை $\sim p$ ஓர் உண்மை வாக்கியம்.

வரையறையில் 'ஆக இருந்தால் இருந்தால்தான்' என வந்துள்ளதால், அதில் கீழ்க்கண்ட இரு கூற்றுகள் அடங்கியுள்ளன:

1. p ஒரு பொய் வாக்கியம் எனில், அப்பொழுது $\sim p$ ஓர் உண்மை வாக்கியம்.

2. $\sim p$ ஓர் உண்மை வாக்கியம் எனில், அப்பொழுது p ஒரு பொய் வாக்கியம்.

எனவே, p ஒரு பொய் வாக்கியம் எனில், $\sim p$ ஓர் உண்மை வாக்கியம்; p ஓர் உண்மை வாக்கியம் எனில், $\sim p$ ஒரு பொய் வாக்கியம்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் வரையறை 1–4·1 ஐ விளக்குகின்றன:

1–4·2. எடுத்துக்காட்டு

p என்பது '6 ஓர் இரட்டை எண்' என்ற வாக்கியம் என்க. அப்பொழுது $\sim p$ என்பது '6 ஓர் இரட்டை எண் அல்ல' என்ற வாக்கியம் ஆகும். p உண்மையாக இருப்பதால், $\sim p$ பொய்.

1–4·3. எடுத்துக்காட்டு

'$7 + 5 = 10$' என்ற வாக்கியத்தை p குறிக்குமானால், '$7 + 5 \neq 10$' என்பதை $\sim p$ குறிக்கும். p பொய்யாக இருப்பதால், $\sim p$ உண்மை.

p-ன் உண்மை மதிப்பு உ எனில், $\sim p$-ன் உண்மை மதிப்பு பொ; p-ன் உண்மை மதிப்பு பொ எனில், $\sim p$-ன் உண்மை மதிப்பு உ. இப்பொழுது $\sim p$-ன் உண்மை மதிப்புகளை ஓர் அட்டவணையில் காட்டலாம். இது $\sim p$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை (truth table) எனப்படும் இது கீழே தரப் பட்டுள்ளது.

1–4·4. $\sim p$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை

p	$\sim p$
உ	பொ
பொ	உ

வரையறை 1–4·1-ல் கூறப்பட்டுள்ள விவரங்கள் அனைத்தும் அட்டவணை 1–4·4-ல் உள்ளன; அவற்றைத் தவிர வேறு விவரம் அட்டவணையில் இல்லை. எனவே, அட்டவணை 1–4·4 ஐ எதிர் மறையின் (negation) மாற்று வரையறையாகக் (alternative definition) கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 1 (ஈ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திற்கும் எதிர்மறையை எழுதுக. கிடைத்த எதிர்மறையின் உண்மை மதிப்பைத் தருக.

1. சூரியன் ஒரு நட்சத்திரம்.
2. தமிழ் நாட்டின் தலைநகர் தரங்கம்பாடி.
3. $9 + 9 = 9$
4. $8 - 5 \neq 5 - 8$
5. வைகை ஓர் ஆறல்ல.
6. $7 \times 4 = 4 \times 7$
7. $3 > 5$
8. 4 ஓர் ஒற்றை எண்.
9. 7 ஒரு பகா எண்.
10. $1 + 1 + 1 \neq 111$

விடைகள்

1. சூரியன் ஒரு நட்சத்திரம் அல்ல. பொய்.
2. தமிழ் நாட்டின் தலைநகர் தரங்கம்பாடி அல்ல உண்மை.
3. $9 + 9 \neq 9$. உண்மை.
4. $8 - 5 = 5 - 8$. பொய்.
5. வைகை ஓர் ஆறு. உண்மை.
6. $7 \times 4 \neq 4 \times 7$. பொய்.
7. $3 \not> 5$. உண்மை.
8. 4 ஓர் ஒற்றை எண் அல்ல. உண்மை.
9. 7 ஒரு பகா எண் அல்ல. பொய்.
10. $1 + 1 + 1 = 111$. பொய்.

1–5. இணைப்பு (Conjunction)

1–5·1. வரையறை

p ஓர் உண்மை வாக்கியம், மற்றும் q ஓர் உண்மை வாக்கியம் என இருந்தால் இருந்தால்தான், p, q-களின் இணைப்பு $p \wedge q$ ஓர் உண்மை வாக்கியம்.

வரையறையில் கீழ்க்கண்ட இரு கூற்றுகள் அடங்கி உள்ளன:

1. p-ம் q-ம் உண்மை வாக்கியங்கள் எனில், அப்பொழுது $p \wedge q$ ஓர் உண்மை வாக்கியம்.

2. $p \wedge q$ ஓர் உண்மை வாக்கியம் எனில், அப்பொழுது p-ம் q-வும் உண்மை வாக்கியங்கள்.

இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் கிடைக்கின்றன:

1. p உண்மை, மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \wedge q$ உண்மை.

2. p உண்மை, மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \wedge q$ பொய்.

3. p பொய், மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \wedge q$ பொய்.

4. p பொய், மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \wedge q$ பொய்.

எனவே, $p \wedge q$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

1–5·2. $p \wedge q$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை

p	q	$p \wedge q$
உ	உ	உ
உ	பொ	பொ
பொ	உ	பொ
பொ	பொ	பொ

வரையறை 1–5·1-ல் கூறப்பட்டுள்ள விவரங்கள் அனைத்தும் அட்டவணை 1–5·2-ல் உள்ளன; அவற்றைத் தவிர வேறு விவரம் அட்டவணையில் இல்லை. எனவே, அட்டவணை 1–5·2 ஐ $p \wedge q$-ன் வரையறையாகக் கொள்ளலாம்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் வரையறை 1–5·1 ஐ விளக்குகின்றன.

1–5·3. எடுத்துக்காட்டு

$(4+1=5) \wedge (6 \times 2 = 12)$ என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $4+1=5$ என்பதும் உண்மை, $6 \times 2 = 12$ என்பதும் உண்மை.

1–5·4. எடுத்துக்காட்டு

$(5-2=3) \wedge (4+6=11)$ என்பது பொய். ஏனென்றால் $5-2=3$ என்பது உண்மை, $4+6=11$ என்பது பொய்.

1–5·5. எடுத்துக்காட்டு

(2 ஒரு பகு எண்) $\wedge$ $(6+3 \neq 8)$ என்பது பொய். ஏனென்றால், 2 ஒரு பகு எண் என்பது பொய், $6+3 \neq 8$ என்பது உண்மை.

1–5·6. எடுத்துக்காட்டு

(காவிரி ஒரு மலை) $\wedge$ (தமிழ் நாட்டின் தலைநகர் திருச்சி) என்பது பொய். ஏனென்றால், காவிரி ஒரு மலை என்பதும் பொய், தமிழ் நாட்டின் தலைநகர் திருச்சி என்பதும் பொய்.

பயிற்சி 1 (உ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திற்கும் உண்மை மதிப்பைக் காண்க.

1. (இந்தியா ஒரு குடியரசு) $\wedge$ (விந்தியம் ஒரு மலை).
2. (2 ஒரு பகு எண்) $\wedge$ (7 ஓர் இரட்டை எண்).
3. $(7 - 2 = 5) \wedge (6 + 4 \neq 10)$.
4. $(6 + 6 = 6) \wedge (5 - 3 = 2)$.
5. $(2 + 2 = 4) \wedge (2 \times 2 = 4)$.
6. $(5 \neq 5) \wedge (5 = 5)$.

விடைகள்

1. உண்மை.
2. பொய்.
3. பொய்.
4. பொய்.
5. உண்மை.
6. பொய்.

1–6. பிரிப்பு (Disjunction)

1–6·1. வரையறை

p ஒரு பொய் வாக்கியம், மற்றும் q ஒரு பொய் வாக்கியம் என இருந்தால் இருந்தால்தான், p, q களின் பிரிப்பு, $p \vee q$ ஒரு பொய் வாக்கியம்.

வரையறையில் கீழ்க்கண்ட இரு கூற்றுகள் அடங்கி உள்ளன.

1. p-ம் q-ம் பொய் வாக்கியங்கள் எனில், அப்பொழுது $p \vee q$ ஒரு பொய் வாக்கியம்.
2. $p \vee q$ ஒரு பொய் வாக்கியம் எனில், அப்பொழுது p-ம் q-ம் பொய் வாக்கியங்கள்.

இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் கிடைக்கின்றன:

1. p உண்மை மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \vee q$ உண்மை.
2. p உண்மை மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \vee q$ உண்மை.
3. p பொய் மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \vee q$ உண்மை.
4. p பொய் மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \vee q$ பொய்.

எனவே, $p \vee q$-ன் உண்மை மதிப்பு கீழ்க்கண்டவாறு அமைகிறது.

1–6·2. $p \vee q$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை

p	q	$p \vee q$
உ	உ	உ
உ	பொ	உ
பொ	உ	உ
பொ	பொ	பொ

வரையறை 1–6·1-ல் கூறப்பட்டுள்ள விவரங்கள் அனைத்தும் அட்டவணை 1–6·2-ல் உள்ளன; அவற்றைத் தவிர வேறு விவரம் அட்டவணையில் இல்லை. எனவே, அட்டவணை 1–6·2 ஐ $p \vee q$-ன் வரையறையாகக் கொள்ளலாம்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் வரையறை 1–6·1ஐ விளக்குகின்றன.

1–6·3. எடுத்துக்காட்டு

$(4 + 3 = 7) \vee (5 > 2)$ என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $4 + 3 = 7$ என்பதும் உண்மை, $5 > 2$ என்பதும் உண்மை.

1–6·4. எடுத்துக்காட்டு

$(5 - 4 = 1) \vee$ (6 ஒரு பகா எண்) என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $5 - 4 = 1$ என்பது உண்மை, 6 ஒரு பகா எண் என்பது பொய்.

1–6·5. எடுத்துக்காட்டு

(2 ஓர் ஒற்றை எண்) $\vee$ (8 ஒரு பகு எண்) என்பது உண்மை. ஏனென்றால், 2 ஓர் ஒற்றை எண் என்பது பொய், 8 ஒரு பகு எண் என்பது உண்மை.

1–6·6. எடுத்துக்காட்டு

$(2 = 3) \vee (5 + 5 = 5)$ என்பது பொய். ஏனென்றால், $2 = 3$ என்பதும் பொய், $5 + 5 = 5$ என்பதும் பொய்.

அன்றாட வழக்கில் 'அல்லது' என்ற இணைப்பி ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் (exclusive), ஒன்றை ஒன்று விலக்காத (non-exclusive) என்ற இரு பொருள்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. சான்றாக, 'கதிரவன் அடுத்த ஆண்டு கல்லூரியில் சேருவான் அல்லது கதிரவன் அடுத்த ஆண்டு பாலிடெக்னிக்கில் சேருவான்' என்ற வாக்கியத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இது, 'கதிரவன் அடுத்த ஆண்டு கல்லூரியில் சேருவான்', 'கதிரவன் அடுத்த ஆண்டு பாலிடெக்னிக்கில் சேருவான் என்ற இரு வாக்கியங்களின் பிரிப்பு. கதிரவன் அடுத்த ஆண்டு கல்லூரி, பாலிடெக்னிக் என்ற இரண்டில் ஒன்றில் தான் சேர முடியும். எனவே, அந்த இரு வாக்கியங்களில் ஒன்று மற்றதை விலக்குகிறது.

அடுத்து, 'செந்தாமரை அடுத்த ஆண்டு பணி புரிவாள் அல்லது செந்தாமரை அடுத்த ஆண்டு கல்லூரியில் படிப்பாள்' என்ற வாக்கியத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இது, செந்தாமரை அடுத்த ஆண்டு பணி புரிவாள்', 'செந்தாமரை அடுத்த ஆண்டு கல்லூரியில் படிப்பாள்' என்ற இரு வாக்கியங்களில் பிரிப்பு. செந்தாமரை அடுத்த ஆண்டு பணி புரியலாம் அல்லது கல்லூரியில் படிக்கலாம் அல்லது பணி புரிந்து கொண்டே கல்லூரியில் படிக்கலாம். எனவே, அந்த இரு வாக்கியங்களில் ஒன்று மற்றதை விலக்கவில்லை. ஆகவே,

$p \vee q$ உண்மை என்பதற்கு அன்றாட வழக்கில்,

'p உண்மை அல்லது q உண்மை ஆனால் p-ம் q-ம் உண்மை அல்ல',

'p உண்மை அல்லது q உண்மை அல்லது p-ம் q-ம் உண்மை' என்ற இரு பொருள்களும் உண்டு. ஆனால், அளவையியலிலும் கணிதத்திலும் வரையறை 1–6·1-ன் படி,

$p \vee q$ உண்மை என்பதற்கு 'p உண்மை அல்லது q உண்மை அல்லது p-ம் q-ம் உண்மை' எனக் கொள்கிறோம்.

பயிற்சி 1 (ஊ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திற்கும் உண்மை மதிப்பைக் காண்க.

1. காக்கை சிவப்பு அல்லது கடல் நீர் புளிப்பு.
2. பம்பாய் ஒரு துறைமுகம் அல்லது யமுனை ஓர் ஆறு.
3. $(3 + 3 = 6) \vee (3 \times 3 = 6)$

4. $(7 \neq 7) \quad \vee \quad (7 = 7)$
5. $(0 + 0 = 0) \quad \vee \quad (0 \times 0 = 0)$
6. $(3 < 2) \quad \vee \quad (4 < 3)$

விடைகள்

1.	பொய்	4.	உண்மை
2.	உண்மை	5.	உண்மை
3.	உண்மை	6.	பொய்

1–7. நிபந்தனை வாக்கியம்

1–7·1. வரையறை

p ஓர் உண்மை வாக்கியம். மற்றும் q ஒரு பொய் வாக்கியம் என இருந்தால் இருந்தால்தான், $p \longrightarrow q$ என்ற நிபந்தனை வாக்கியம் ஒரு பொய் வாக்கியம்.

வரையறையில் கீழ்க்கண்ட இரு கூற்றுகள் அடங்கி உள்ளன.

1. p ஓர் உண்மை வாக்கியம் மற்றும் q ஒரு பொய் வாக்கியம். எனில், அப்பொழுது $p \longrightarrow q$ ஒரு பொய் வாக்கியம்.

2. $p \longrightarrow q$ ஒரு பொய் வாக்கியம் எனில், அப்பொழுது p ஓர் உண்மை வாக்கியம், மற்றும் q ஒரு பொய் வாக்கியம்.

இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் கிடைக்கின்றன:

1. p உண்மை மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \longrightarrow q$ உண்மை.

2. p உண்மை மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \longrightarrow q$ பொய்.

3. p பொய் மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \longrightarrow q$ உண்மை.

4. p பொய் மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \longrightarrow q$ உண்மை.

எனவே, $p \longrightarrow q$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை கீழ்க்கண்ட வாறு அமைகிறது.

1–7·2. $p \longrightarrow q$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை

p	q	$p \longrightarrow q$
உ	உ	உ
உ	பொ	பொ
பொ	உ	உ
பொ	பொ	உ

வரையறை 1–7·1-ல் கூறப்பட்டுள்ள விவரங்கள் அனைத்தும் அட்டவணை 1–7·2-ல் உள்ளன; அவற்றைத் தவிர வேறு விவரம் எதுவும் அட்டவணையில் இல்லை. எனவே, அட்டவணை 1–7·2 ஐ $p \longrightarrow q$-ன் வரையறையாகக் கொள்ளலாம்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் வரையறை 1–7·1ஐ விளக்குகின்றன.

1–7·3. எடுத்துக்காட்டு

$(4 \times 5 = 20) \longrightarrow (7 + 2 = 9)$ என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $4 \times 5 = 20$ என்பதும் உண்மை, $7 + 2 = 9$ என்பதும் உண்மை.

1–7·4. எடுத்துக்காட்டு

$(5 - 3 = 2) \longrightarrow (6 \times 1 = 7)$ என்பது பொய். ஏனென்றால், $5 - 3 = 2$ என்பது உண்மை, $6 \times 1 = 7$ என்பது பொய்.

1–7·5. எடுத்துக்காட்டு

$(8 + 1 = 1) \longrightarrow (3 + 7 = 10)$ என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $8 + 1 = 1$ என்பது பொய். $3 + 7 = 10$ என்பது உண்மை.

1–7·6. எடுத்துக்காட்டு

$(3 - 7 = 4) \longrightarrow (2 + 5 = 8)$ என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $3 - 7 = 4$ என்பது பொய், $2 + 5 = 8$ என்பது பொய்.

$p \longrightarrow q$ என்ற நிபந்தனை வாக்கியத்தில் வரும் p என்ற வாக்கியத்தை $p \longrightarrow q$-ன் முற்கூறு, ஏது (antecedent) அல்லது எடுகோள் (hypothesis) என்றும், q என்ற வாக்கியத்தை $p \longrightarrow q$-ன் பிற்கூறு, விளைவு (consequent) அல்லது முடிவு (conclusion) என்றும் அழைக்கிறோம்.

கணிதத்தில் பல தேற்றங்கள் $p \longrightarrow q$ என்ற வடிவில் இருக்கின்றன. ஒரு தேற்றம் $p \longrightarrow q$ என்ற வடிவில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அப்பொழுது $p \longrightarrow q$ என்பது உண்மை. எனவே, எடுகோள் p உண்மையாக இருந்தால், அப்பொழுது முடிவு q பொய்யாக இருக்க முடியாது.

பயிற்சி 1 (எ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திற்கும் உண்மை மதிப்பைக் காண்க.

1. வள்ளலாருக்கு முந்தியவர் கம்பர் எனில், அப்பொழுது வள்ளுவருக்கு முந்தியவர் தொல்காப்பியர்.
2. $(3 + 3 = 6) \longrightarrow (3 \times 3 = 3)$.
3. 6 ஒரு பகா எண் எனில், அப்பொழுது 3 ஒரு பகு எண்.
4. $(8 > 6) \longrightarrow (6 + 3 = 9)$.
5. $3 = 2$ எனில், அப்பொழுது $4 = 2 + 2$.
6. $(6 + 5 = 11) \longrightarrow (6 \times 5 \neq 30)$.

விடைகள்

1. உண்மை.
2. பொய்.
3. உண்மை.
4. உண்மை.
5. உண்மை.
6. பொய்.

1–8. இரு நிபந்தனை வாக்கியம் (Biconditional Sentence)

1–8·1. வரையறை

p, q என்ற இரண்டும் உண்மை வாக்கியங்கள் அல்லது p, q என்ற இரண்டும் பொய் வாக்கியங்கள் என இருந்தால் இருந்தால் தான், $p \longleftrightarrow q$ என்ற இரு நிபந்தனை வாக்கியம் ஓர் உண்மை வாக்கியம்.

வரையறையிலிருந்து கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் கிடைக்கின்றன:

1. p உண்மை மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \longleftrightarrow q$ உண்மை.

2. p உண்மை மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \longleftrightarrow$ பொய்.

3. p பொய் மற்றும் q உண்மை எனில், அப்பொழுது $p \leftrightarrow q$ பொய்.

4. p பொய் மற்றும் q பொய் எனில், அப்பொழுது $p \leftrightarrow q$ உண்மை.

எனவே, $p \leftrightarrow q$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை கீழ்க் கண்டவாறு அமைகிறது.

1–8·2. $p \leftrightarrow q$-ன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணை

p	q	$p \leftrightarrow q$
உ	உ	உ
உ	பொ	பொ
பொ	உ	பொ
பொ	பொ	உ

வரையறை 1–8·1-ல் கூறப்பட்டுள்ள விவரங்கள் அனைத்தும் அட்டவணை 1–8·2-ல் உள்ளன; அவற்றைத் தவிர வேறு விவரம் அட்டவணையில் இல்லை. எனவே, அட்டவணை 1–8·2 ஐ $p \leftrightarrow q$-ன் வரையறையாகக் கொள்ளலாம்.

கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் வரையறை 1–8·1 ஐ விளக்குகின்றன.

1–8·3. எடுத்துக்காட்டு

$(4+2=6) \leftrightarrow (5-3=2)$ என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $4+2=6$ என்பதும் உண்மை, $5-3=2$ என்பதும் உண்மை.

1–8·4. எடுத்துக்காட்டு

$(1-1=0) \leftrightarrow (7\times3=20)$ என்பது பொய். ஏனென்றால், $1-1=0$ என்பது உண்மை, $7\times3=20$ என்பது பொய்.

1–8·5. எடுத்துக்காட்டு

$(8+3=10) \leftrightarrow (4+5=9)$ என்பது பொய். ஏனென்றால், $8+3=10$ என்பது பொய், $4+5=9$ என்பது உண்மை.

1–8·6. எடுத்துக்காட்டு

$(3-4=1) \leftrightarrow (2+2=2)$ என்பது உண்மை. ஏனென்றால், $3-4=1$ என்பதும் பொய், $2+2=2$ என்பதும் பொய்.

பயிற்சி 1 (ஏ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திற்கும் உண்மை மதிப்பைக் காண்க.

1. $(4 + 3 = 7) \leftrightarrow (5 \times 8 = 40)$
2. $(2 + 0 = 2) \leftrightarrow (0 - 2 = 2)$
3. தமிழ்நாட்டின் தலைநகர் திருச்சியாக இருந்தால் இருந்தால்தான், சென்னை ஒரு துறைமுகம்.
4. புலி புல் தின்னுமென்றால் என்றால்தான், யானை புலால் உண்ணும்.
5. $(3 + 3 = 0) \leftrightarrow (3 - 3 = 0)$.
6. ABC ஒரு சமகோண முக்கோணமாக இருந்தால் இருந்தால்தான், ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

விடைகள்

1.	உண்மை	4.	உண்மை
2.	பொய்	5.	பொய்
3.	பொய்	6.	உண்மை

1–9. வழிவந்த உண்மை மதிப்பு அட்டவணைகள் (Derived Truth Tables)

நாம் இதுவரை ஐந்து அடிப்படைக் கூட்டுக் கூற்றுகளின் உண்மை மதிப்பு அட்டவணைகள் அமைத்துள்ளோம். மற்றக் கூட்டுக் கூற்றுகளின் உண்மை மதிப்பு அட்டவணைகளை இந்த ஐந்து அட்டவணைகளிலிருந்து பெறமுடியும். எனவே, இவை ஐந்தும் அடிப்படை உண்மை மதிப்பு அட்டவணைகள் (basic truth tables) எனவும், மற்ற உண்மை மதிப்பு அட்டவணைகள் வழிவந்த உண்மை மதிப்பு அட்டவணைகள் (derived truth tables) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

வழிவந்த உண்மை மதிப்பு அட்டவணைகள் அமைப்பதற்குக் கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் துணை செய்யும்.

1–9·1. எடுத்துக்காட்டு

$\sim(p \vee q)$ என்பதன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையை அமைப்போம். p, q, $p \vee q$, $\sim(p \vee q)$ என்பவை அனைத்தும் $\sim(p \vee q)$-ன் கூறுகளாக (components) இருப்பதால், இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு நிரல் (column) அமைக்கின்றோம்.

அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதை அமைக்க 1–6·2 1–4·4 என்ற இரு அட்டவணைகளும் துணை செய்கின்றன.

p	q	$p \vee q$	$(\sim p \vee q)$
உ	உ	உ	பொ
உ	பொ		பொ
பொ	உ	உ	பொ
பொ	பொ	பொ	உ

1–9·2. எடுத்துக்காட்டு

$(p \wedge q) \longrightarrow \sim p$ என்பதன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையை அமைப்போம். $p, q, p \wedge q, \sim p, (p \wedge q) \longrightarrow \sim p$ என்பவை அனைத்தும் கொடுத்துள்ள கூட்டுக் கூற்றின் கூறுகளாக இருப்பதால், இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு நிரல் அமைக்கிறோம். அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதை அமைக்க 1–5·2, 1–4·4, 1–7·2 என்ற மூன்று அட்டவணைகளும் துணை செய்கின்றன.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$(p \wedge q) \longrightarrow \sim p$
உ	உ	உ	பொ	பொ
உ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	பொ	உ	உ
பொ	பொ	பொ	உ	உ

1–9·3. எடுத்துக்காட்டு

$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ என்பதன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையை அமைப்போம். $p, q, p \longrightarrow q, q \longrightarrow p, (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ என்பவை அனைத்தும் கொடுத்துள்ள கூட்டுக் கூற்றின் கூறுகளாக இருப்பதால், இவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு நிரல் அமைக்கிறோம். அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதை அமைக்க 1–7·2, 1–5·2 என்ற இரு அட்டவணைகளும் துணை செய்கின்றன.

p	q	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow q)$
உ	உ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	உ	பொ
பொ	உ	உ	பொ	பொ
பொ	பொ	உ	உ	உ

மேலே உள்ள அட்டவணையிலிருந்தும், அட்டவணை 1–8·2 லிருந்தும் கீழ்வரும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

p	q	$p \longleftrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
உ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	பொ
பொ	உ	பொ	பொ
பொ	பொ	உ	உ

எனவே, $p \longleftrightarrow q$, $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ ஆகியவற்றின் உண்மை மதிப்புகள் அனைத்தும் ஒரே மாதிரியாக (identical) உள்ளன. ஆகவே, $p \longrightarrow q$ உண்மை மற்றும் $q \longrightarrow p$ உண்மை என இருந்தால் இருந்தால்தான், $p \longleftrightarrow q$ உண்மை. எனவே, $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ என்பதையே $p \longleftrightarrow q$-ன் வரையறைக்கு (1–8·1) மாற்று வரையறையாகக் கொள்ளலாம். கணிதத்தில் பல தேற்றங்கள் $p \longleftrightarrow q$ என்ற வடிவில் இருக்கின்றன. இவைகளை நிறுவ $p \longleftrightarrow q$-ன் மாற்று வரையறையைப் பயன்படுத்துவது நல்லது, எனவே, $p \longleftrightarrow q$ என்ற வடிவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தேற்றத்தை நிறுவ, $p \longrightarrow q$ உண்மை மற்றும் $q \longrightarrow p$ உண்மை என நிறுவினால் போதும். சான்றாக,

'$\forall a$, a ஓர் ஒற்றை எண் $\longleftrightarrow$ a^2 ஓர் ஒற்றை எண்' என்ற தேற்றத்தை நிறுவ,

'$\forall a$, a ஓர் ஒற்றை எண் $\longrightarrow$ a^2 ஓர் ஒற்றை எண்'

'$\forall a$, a^2 ஓர் ஒற்றை எண் $\longrightarrow$ a ஓர் ஒற்றை எண்' என்ற இரு தேற்றங்களையும் நிறுவினால் போதும்.

1–9·4. எடுத்துக்காட்டு

$p \vee \sim p$ என்பதன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையை அமைப்போம். p, $\sim p$, $p \vee \sim p$ என்பவை அனைத்தும் கொடுத்துள்ள கூட்டுக் கூற்றின் கூறுகளாக இருப்பதால், அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு நிரல் அமைக்கிறோம். அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதை அமைக்க 1–4·4, 1–6·2 என்ற இரு அட்டவணைகளும் துணை செய்கின்றன.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
உ	பொ	உ
பொ	உ	உ

1–9·5. எடுத்துக்காட்டு

$(p \longrightarrow q) \quad \longleftrightarrow \quad (\sim q \longrightarrow \sim p)$ என்பதன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையை அமைப்போம். p, q, $\sim q$, $\sim p$, $p \longrightarrow q$, $\sim q \longrightarrow \sim p$, $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$ என்பவை அனைத்தும் கொடுத்துள்ள கூட்டுக் கூற்றின் கூறுகளாக இருப்பதால், அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு நிரல் அமைக்கிறோம். அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதை அமைக்க, 1–4·4, 1–7·2, 1–8·2 என்ற மூன்று அட்டவணைகளும் துணை செய்கின்றன.

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \longrightarrow q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$	$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$
உ	உ	பொ	பொ	உ	உ	உ
உ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	பொ	உ	உ	உ	உ
பொ	பொ	உ	உ	உ	உ	உ

1-9·6. எடுத்துக்காட்டு

$p \wedge \sim p$ என்பதன் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையை அமைப்போம். p, $\sim p$, $p \wedge \sim p$ என்பவை அனைத்தும் கொடுத்

துள்ள கூட்டுக் கூற்றின் கூறுகளாக இருப்பதால், அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு நிரல் அமைக்கிறோம். அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதை அமைக்க, 1–4·4, 1–5·2 என்ற இரு அட்டவணைகளும் துணை செய்கின்றன.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
உ	பொ	பொ
பொ	உ	பொ

பயிற்சி 1 (ஐ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு கூட்டுக் கூற்றிற்கும் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையை அமைக்க.

1. $(p \vee q) \longrightarrow p$.
2. $p \longrightarrow (p \longrightarrow q)$.
3. $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q)$.
4. $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (q \longrightarrow p)$.
5. $\sim (p \wedge q) \longleftrightarrow (p \longrightarrow \sim q)$.

விடைகள்

1.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \longrightarrow p$
உ	உ	உ	உ
உ	பொ	உ	உ
பொ	உ	உ	பொ
பொ	பொ	பொ	உ

2.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$
உ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	பொ
பொ	உ	உ	உ
பொ	பொ	உ	உ

3.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
உ	உ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	உ	உ
பொ	உ	பொ	உ	உ
பொ	பொ	பொ	பொ	உ

4.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
உ	உ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	உ	பொ
பொ	உ	உ	பொ	பொ
பொ	பொ	உ	உ	உ

5.

p	q	$\sim q$	$p \wedge p$	$\sim (p \wedge q)$	$p \longrightarrow \sim q$	$\sim (p \wedge q) \longleftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$
உ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	உ
உ	பொ	உ	பொ	உ	உ	உ
பொ	உ	பொ	பொ		உ	உ
பொ	பொ	உ	பொ	உ	உ	உ

1–4·0. அளவையியல் உண்மைகள் (Logical Truths)

எடுத்துக்காட்டு 1–9·4-ல் வரும் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையில் p-ன் உண்மை மதிப்பு எதாக இருந்தாலும், $p \vee \sim p$ என்பதன் உண்மை மதிப்புகள் அனைத்தும் 'உ' ஆகும். எடுத்துக்காட்டு 1–9·5-ல் வரும் உண்மை மதிப்பு அட்டவணையில், p, q களின் உண்மை மதிப்புகள் எவையாக இருந்தாலும், $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$ என்பதன் உண்மை மதிப்புகள் அனைத்தும் 'உ' ஆகும். எனவே, $p \vee \sim p$, $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$ என்பவை கூட்டுக் கூற்றுகளில் ஒரு தனி வகையைச் சேர்ந்தவை. இத்தகைய கூற்று ஒவ்வொன்றும் அளவையியல் உண்மை (logical truth) அல்லது டாடாலஜி (tautology) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1–9·6-ல், p உண்மையாக இருந்தாலும் பொய்யாக இருந்தாலும், $p \wedge \sim p$ ஒரு பொய்க் கூற்று. இத்தகைய கூற்றுகளை அளவையியல் முறைப்படி பொய்க் கூற்றுகள் (logically false statements) என்கிறோம்.

1–10·1. வரையறை

ஒரு கூட்டுக் கூற்று, அதன் கூறுகளான தனிக் கூற்றுகளின் உண்மை மதிப்புகள் எவையாக இருந்தாலும் உண்மையாக இருந்தால், அது ஓர் அளவையியல் உண்மை (logical truth) அல்லது டாடாலஜி (tautology) எனப்படும்.

1–10·2. வரையறை

ஒரு கூட்டுக் கூற்று, அதன் கூறுகளான தனிக் கூற்றுகளின் உண்மை மதிப்புகள் எவையாக இருந்தாலும் பொய்யாக

இருந்தால், அது அளவையியல் முறைப்படி ஒரு பொய்க் கூற்று (logically false statement) எனப்படும்.

1–4·4, 1–5·2, 1–6·2, 1–7·2, 1–8·2 என்ற ஐந்து அட்டவணைகளிலிருந்து $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \longrightarrow q$, $p \longleftrightarrow q$ என்ற ஐந்தில், எதுவும் அளவையியல் உண்மை அல்ல என அறிகிறோம். 1–9·1, 1–9·2, 1–9·3 என்ற எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து $\sim (p \vee q)$, $(p \wedge q) \longrightarrow \sim p$, $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ என்பவைகளும் அளவையியல் உண்மைகள் அல்ல என அறிகிறோம்.

கணிதத்தில் ஒவ்வோர் அளவையியல் உண்மையும் ஒரு தேற்றம். எனவே, அளவையியல் உண்மைகளில் மிகுந்து அக்கறை காட்டுவோம்.

1–10·3. வரையறை

$p \longrightarrow q$ என்ற நிபந்தனை வாக்கியம் அளவையியல் உண்மையாக இருந்தால் இருந்தால்தான், p ஆனது q ஐ உணர்த்துகிறது (implies) என்கிறோம். இதை $p \Longrightarrow q$ என எழுதுகிறோம்.

'$p \Longrightarrow q$' என்பதை ஓர் ஒரு–வழி உணர்த்தல் (one-way implication) என்றும் சொல்கிறோம்.

'$p \longrightarrow q$' என்ற வடிவில் உள்ள ஒவ்வொரு கணிதத் தேற்றமும் ஓர் உணர்த்தல் ஆகும்; எடுகோள் p முடிவு q ஐ உணர்த்துகிறது. சான்றாக,

'a ஓர் ஒற்றை எண் எனில், அப்பொழுது $2a$ ஓர் இரட்டை எண்' என்பது ஓர் உணர்த்தல் ஆகும்.

1–10·4. வரையறை

$p \longleftrightarrow q$ என்ற இரு நிபந்தனை வாக்கியம் ஓர் அளவையியல் உண்மையாக இருந்தால் இருந்தால்தான் p ஆனது q-க்குச் சமத்துவமானது (equivalent) என்கிறோம். இதை $p \Longleftrightarrow q$ என எழுதுகிறோம்.

'$p \Longleftrightarrow q$' என்பதை ஓர் இரு-வழி உணர்த்தல் (two way implication) அல்லது சமத்துவம் (equivalence) என்கிறோம்.

'$p \longleftrightarrow q$' என்ற வடிவில் உள்ள ஒவ்வொரு கணிதத் தேற்றமும் ஓர் இரு-வழி உணர்த்தல் ஆகும். எனவே, $p \Longrightarrow q$ மற்றும் $q \Longrightarrow p$. சான்றாக,

'$\forall a$, a ஓர் இரட்டை எண்ணாக இருந்தால் இருந்தால்தான், a^2 ஓர் இரட்டை எண்' என்ற தேற்றம் ஒரு சமத்துவம் ஆகும்.

கீழ்வருபவை மிகுந்த பயனுள்ள அளவையியல் உண்மைகள்.

1-10·5. சுருக்கல் விதிகள் (Laws of Simplification)

(a) $(p \wedge q) \Longrightarrow p$.

(b) $(p \wedge q) \Longrightarrow q$.

1-10·6. கூட்டல் விதிகள் (Laws of Addition)

(a) $p \Longrightarrow (p \vee q)$.

(b) $q \Longrightarrow (p \vee q)$.

1-10·7. பிரித்தல் விதி (Law of Detachment)

$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Longrightarrow q$.

1-10·8. சார்புற்ற முக்கூற்று முடிவின் விதி (Law of Hypothetical Syllogism)

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Longrightarrow (p \rightarrow r)$.

1-10·9. முற்றொருமை விதி (Law of Identity)

$p \Longleftrightarrow p$.

1-10·10. இரட்டை எதிர்மறை விதி (Law of Double Negation)

$p \Longleftrightarrow \sim \sim p$.

1-10·11. தன்னுற்றல் விதிகள் (Idempotent Laws)

(a) $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$.

(b) $(p \vee p) \Longleftrightarrow p$.

1-10·12. பரிமாற்று விதிகள் (Commutative Laws)

(a) $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$.

(b) $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$.

1-10·13. டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws)

(a) $\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

(b) $\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

3

1–10·14. நேர்மாறு-மறுதலை விதி (Law of Contraposition)

$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$.

1–10·15. நிபந்தனை வாக்கியம், பிரிப்பு ஆகியவற்றிற்குச் சமத்துவ விதி

$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$.

1–10·16. நிபந்தனை வாக்கியத்தின் எதிர்மறை விதி

$\sim(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

1–10·17. இரு நிபந்தனை வாக்கியங்களுக்கு விதிகள்

(a) $(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$.

(b) $(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.

1–10·18. சேர்ப்பு விதிகள் (Associative Laws)

(a) $[p \wedge (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$.

(b) $[p \vee (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$.

1–10·19. பங்கீட்டு விதிகள் (Distributive Laws)

(a) $[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

(b) $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

1–10·20. நடுப்பொருள் நீக்க விதி (Law of Excluded Middle)

$p \vee \sim p$ ஓர் அளவையியல் உண்மை.

1–10·21. முரணுமை விதி (Law of Non–contradiction)

$\sim (p \wedge \sim p)$ ஓர் அளவையியல் உண்மை.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விதிகளுள் சிலவற்றை மட்டும் நிறுவுவோம்.

1–10·6. (a) $p \Longrightarrow (p \vee q)$.

நிறுவல் :

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
உ	உ	உ	உ
உ	பொ	உ	உ
பொ	உ	உ	உ
பொ	பொ	பொ	உ

இந்த அட்டவணையில், இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, 1–10·3-ன் படி,

$$p \Longrightarrow (p \vee q).$$

1–10·8. $[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \longrightarrow r)$.

நிறுவல் :

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$[p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$
உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ
உ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	உ
உ	பொ	உ	பொ	உ	பொ	உ	உ
உ	பொ	பொ	பொ	உ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ
பொ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	உ	உ
பொ	பொ	உ	உ	உ	உ	உ	உ
பொ	பொ	பொ	உ	உ	உ	உ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள, எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ' . எனவே, 1–10·3-ன் படி,

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \longrightarrow r).$$

1–10·10. $p \Longleftrightarrow \sim\sim p$.

நிறுவல் :

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$p \longleftrightarrow \sim\sim p$
உ	பொ	உ	உ
பொ	உ	பொ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, 1–10·4-ன் படி,

$$p \Longleftrightarrow \sim \sim p.$$

1–10·12 (a). $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$.

நிறுவல் :

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p)$
உ	உ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	பொ	பொ	உ
பொ	பொ	பொ	பொ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, 1–10·4-ன் படி,

$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p).$$

1–10·13 (b). $\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

நிறுவல் :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
உ	உ	பொ	பொ	உ	பொ	பொ	உ
உ	பொ	பொ	உ	உ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	உ
பொ	பொ	உ	உ	பொ	உ	உ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, 1–10·4-ன் படி,

$$\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q).$$

1–10·15. $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$.

நிறுவல் :

p	$\sim p$	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\sim p \vee q)$
உ	பொ	உ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	உ	உ	உ	உ
பொ	உ	பொ	உ	உ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, 1–10·4-ன் படி,

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q).$$

1–10·17(b). $(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.

நிறுவல் :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \longleftrightarrow q$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	$(p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee \sim p \wedge \sim q)]$
உ	உ	பொ	பொ	உ	பொ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	உ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	பொ	உ	உ	பொ	உ	உ	உ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, 1–10·4-ன் படி,

$$(p \longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)].$$

1–10·18 (a). $[p \wedge (q \wedge r] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$.

நிறுவல் :

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$[p \wedge (q \wedge r)] \longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r$
உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ
உ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	உ
உ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ
உ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ
பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் ‘உ’. எனவே, 1–10·4-ன் படி,

$[p \wedge (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$.

1–10·19 (b). $[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.

நிறுவல் :

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$[p \vee (q \wedge r)] \longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ
உ	உ	பொ	உ	உ	பொ	உ	உ	உ
உ	பொ	உ	உ	உ	பொ	உ	உ	உ
உ	பொ	பொ	உ	உ	பொ	உ	உ	உ
பொ	உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ	உ
பொ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ
பொ	பொ	உ	பொ	உ	பொ	பொ	பொ	பொ
பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ	பொ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, 1–10·4-ன் படி,

$$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

1–10·21. $\sim (p \wedge \sim p)$ ஓர் அளவையியல் உண்மை.

நிறுவல் :

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
உ	பொ	பொ	உ
பொ	உ	பொ	உ

இந்த அட்டவணையில் இறுதி நிரலிலுள்ள எல்லா உண்மை மதிப்புகளும் 'உ'. எனவே, $\sim (p \wedge \sim p)$ ஓர் அளவையியல் உண்மை.

p-ன் உண்மை மதிப்பு எதுவாக இருந்தாலும், $p \wedge \sim p$ என்பதன் உண்மை மதிப்பு 'பொ'. ஆகவே, $p \wedge \sim p$ என்பது அளவையியல் முறைப்படி ஒரு பொய்யான கூற்று. இதை முரண்பாடு (contradiction) என்கிறோம்.

பயிற்சி 1 (ஓ)

கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $(p \wedge q) \Longrightarrow p$.
2. $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$.
3. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Longrightarrow q$.
4. $(p \vee p) \Longleftrightarrow p$.
5. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$.
6. $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.
7. $\sim (p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$.
8. $[p \vee (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$.
9. $[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

1–11. மறுதலை, நேர்மாறு, நேர்மாறு – மறுதலை (Converse, Inverse and Contrapositive)

$p \longrightarrow q$ என்ற நிபந்தனை வாக்கியத்திலிருந்து பல வழிகளில் புதிய நிபந்தனை வாக்கியங்கள் அமைக்கலாம். அவைகளுள் முக்கிய மான மூன்றை மட்டும் பார்ப்போம்.

1–11·1. வரையறை

$q \longrightarrow p$ என்பது $p \longrightarrow q$ என்பதன் மறுதலை (converse) எனப்படும்.

கீழ்வருபவை மறுதலைக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

1–11·2. எடுத்துக்காட்டு

'மழை பெய்கிறது என்றால், அப்பொழுது ஆற்றில் நீர் ஓடுகிறது' என்பதன் மறுதலை,

'ஆற்றில் நீர் ஓடுகிறது என்றால், அப்பொழுது மழை பெய்கிறது'.

1–11·3 எடுத்துக்காட்டு

'இன்று ஞாயிற்றுக்கிழமை எனில், அப்பொழுது நாளை திங்கள் கிழமை' என்பதன் மறுதலை,

'நாளை திங்கள் கிழமை எனில், அப்பொழுது இன்று ஞாயிற்றுக் கிழமை'.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் கொடுத்துள்ள கூற்றும் உண்மை, அதன் மறுதலையும் உண்மை.

1–11·4. எடுத்துக்காட்டு

'*ABCD* ஒரு சதுரம் எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஒரு செவ்வகம்' என்பதன் மறுதலை,

'*ABCD* ஒரு செவ்வகம் எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஒரு சதுரம்'.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் கொடுத்துள்ள கூற்று உண்மை யானது. இருந்த போதிலும் அதன் மறுதலை உண்மையாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஏனென்றால், செவ்வகங்கள் எல்லாம் சதுரங்கள் அல்ல. எனவே, $p \longrightarrow q$ ஓர் உண்மைக் கூற்று

எனில், அதன் மறுதலை $q \longrightarrow p$ பொய்யாக இருக்கலாம். படிப்ப வர்கள் இந்த உண்மையை நன்றாக மனத்தில் பதிய வைத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

1–11·5 வரையறை

$\sim p \longrightarrow \sim q$ என்பது $p \longrightarrow q$ என்பதன் நேர்மாறு (inverse) எனப்படும்.

கீழ்வருபவை நேர்மாறுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

1-11·6. எடுத்துக்காட்டு

'*ABC* ஒரு சமகோண முக்கோணம் எனில், அப்பொழுது *ABC* ஒரு சமபக்க முக்கோணம்' என்பதன் நேர்மாறு,

'*ABC* ஒரு சமகோண முக்கோணம் அல்ல எனில், அப் பொழுது *ABC* ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அல்ல'.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் கொடுத்துள்ள கூற்றும் உண்மை, அதன் நேர்மாறும் உண்மை.

1–11·7. எடுத்துக்காட்டு

'a ஒரு நேர் எண் (positive number) எனில், அப்பொழுது a^2 ஒரு நேர் எண்' என்பதன் நேர்மாறு 'a ஒரு நேர் எண் அல்ல எனில், அப்பொழுது a^2 ஒரு நேர் எண் அல்ல'.

இந்த எடுத்துக்காட்டில் கொடுத்துள்ள கூற்று உண்மை யானது. இருந்தபோதிலும் அதன் நேர்மாறு பொய்யாக இருக்கலாம். சான்றாக, -5 ஒரு நேர் எண் அல்ல. இருந்த போதிலும் $(-5)^2$ ஒரு நேர் எண். எனவே, $p \longrightarrow q$ ஓர் உண்மைக் கூற்று எனில், அதன் நேர்மாறு $\sim p \longrightarrow \sim q$ பொய்யாக இருக்கலாம்.

1–11·8. வரையறை

$\sim q \longrightarrow \sim p$ என்பது $p \longrightarrow q$ என்பதன் நேர்மாறு-மறுதலை (contrapositive) எனப்படும்.

1–10·14-ன் படி, $(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \longrightarrow \sim p)$ என அறி வோம். எனவே, ஓர் உண்மை நிபந்தனைக் கூற்றின் நேர்மாறு-மறுதலை ஓர் உண்மைக் கூற்றாகும். இனி, நேர்மாறு-மறுதலைக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் பார்ப்போம்.

1–11·9. எடுத்துக்காட்டு

'இன்று ஞாயிற்றுக்கிழமை எனில், அப்பொழுது நேற்று சனிக்கிழமை' என்பதன் நேர்மாறு-மறுதலை

'நேற்று சனிக்கிழமை அல்ல எனில், அப்பொழுது இன்று ஞாயிற்றுக்கிழமை அல்ல'.

1–11·10. எடுத்துக்காட்டு

'a ஓர் ஒற்றை எண் (odd number) எனில், அப்பொழுது a^2 ஓர் ஒற்றை எண்' என்பதன் நேர்மாறு-மறுதலை

'a^2 ஓர் ஒற்றை எண் அல்ல எனில், அப்பொழுது a ஓர் ஒற்றை எண் அல்ல'.

பயிற்சி 1 (ஓ)

கீழ்வரும் ஒவ்வொரு வாக்கியத்திற்கும் மறுதலை, நேர்மாறு, நேர்மாறு-மறுதலை ஆகியவற்றை எழுதுக.

1. இந்த மாதம் மார்கழி எனில், அப்பொழுது அடுத்த மாதம் தை.
2. a ஓர் இரட்டை எண் எனில், அப்பொழுது a^2 ஓர் இரட்டை எண்.
3. $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ எனில், அப்பொழுது $\triangle ABC \parallel\!\mid DEF$.
4. $ABCD$ ஒரு சதுரம் எனில், அப்பொழுது $ABCD$ ஒரு சாய் சதுரம்.
5. ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம் எனில், அப்பொழுது ABC ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம்.
6. $ABCD$ ஓர் இணைகரம் எனில், அப்பொழுது $ABCD$ ஒரு செவ்வகம்.

விடைகள்

1. **மறுதலை** : அடுத்த மாதம் தை எனில், அப்பொழுது இந்த மாதம் மார்கழி.

   நேர்மாறு : இந்த மாதம் மார்கழி அல்ல எனில், அப்பொழுது அடுத்த மாதம் தை அல்ல.

   நேர்மாறு–மறுதலை : அடுத்த மாதம் தை அல்ல எனில், அப்பொழுது இந்த மாதம் மார்கழி அல்ல.

2. மறுதலை : a^2 ஓர் இரட்டை எண் எனில், அப்பொழுது a ஓர் இரட்டை எண்.

நேர்மாறு : a ஓர் இரட்டை எண் அல்ல எனில், அப்பொழுது a^2 ஓர் இரட்டை எண் அல்ல.

நேர்மாறு–மறுதலை : a^2 ஓர் இரட்டை எண் அல்ல எனில், அப்பொழுது a ஓர் இரட்டை எண் அல்ல.

3. மறுதலை : $\triangle ABC \parallel \triangle DEF$ எனில், அப்பொழுது $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

நேர்மாறு : $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$ எனில், அப்பொழுது $\triangle ABC \not\parallel \triangle DEF$.

நேர்மாறு–மறுதலை : $\triangle ABC \not\parallel \triangle DEF$ எனில், அப்பொழுது $\triangle ABC \not\equiv \triangle DEF$

4. மறுதலை : *ABCD* ஒரு சாய்சதுரம் எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஒரு சதுரம்.

நேர்மாறு : *ABCD* ஒரு சதுரம் அல்ல எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஒரு சாய்சதுரம் அல்ல.

நேர்மாறு–மறுதலை : *ABCD* ஒரு சாய்சதுரம் அல்ல எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஒரு சதுரம் அல்ல.

5. மறுதலை : *ABC* ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம் எனில், அப்பொழுது *ABC* ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

நேர்மாறு : *ABC* ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அல்ல எனில், அப்பொழுது *ABC* ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் அல்ல.

நேர்மாறு–மறுதலை : *ABC* ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் அல்ல எனில், அப்பொழுது *ABC* ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அல்ல.

6. மறுதலை : *ABCD* ஒரு செவ்வகம் எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஓர் இணைகரம்.

நேர்மாறு : *ABCD* ஓர் இணைகரம் [illegible] எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஒரு செவ்வகம் அல்ல.

நேர்மாறு–மறுதலை : *ABCD* ஒரு செவ்வகம் அல்ல எனில், அப்பொழுது *ABCD* ஓர் இணைகரம் அல்ல.

2. கணங்களும் உட்கணங்களும்

(Sets and Subsets)

2–1. கணங்கள் (Sets)

2–1·1. வரையறை

ஒரு கணம் (set) என்பது தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட (well defined) பொருள்களின் ஒரு தொகுப்பாகும். அப் பொருள்களை அக் கணத்தின் உறுப்புகள் (elements or members) என்கிறோம் உறுப்புகள் புலன்களால் அறியப்படும் பொருள் களாகவோ, கருத்துப் பொருள்களாகவோ இருக்கலாம்.

கீழ்வருபவை கணத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

2–1·2 எடுத்துக்காட்டு

6, 8, 9 என்ற எண்களின் கணம்

2–1·3. எடுத்துக்காட்டு

இ, ஊ, எ, அ, ஒ என்ற எழுத்துகளின் கணம்.

2–1·4. எடுத்துக்காட்டு

தமிழ் நாடு, பீகார், ஆந்திரம் என்ற மாநிலங்களின் கணம்.

2–1·5. எடுத்துக்காட்டு

சூரியன், 5, நைல், இந்தியா, திருக்குறள் ஆகியவற்றின் கணம்.

2–1·6. எடுத்துக்காட்டு

எல்லாத் தமிழ் மாதங்களின் கணம்.

2–1·7. எடுத்துக்காட்டு

வானவில்லிலுள்ள எல்லா வண்ணங்களின் கணம்.

2–1·8. எடுத்துக்காட்டு

1 முதல் 5 முடிய உள்ள எல்லா இயற்கை எண்களின் (natural numbers) *கணம்.*

2–1·9. எடுத்துக்காட்டு

$x^2 - 7x + 12 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் (equation) எல்லா மூலங்களின் (roots) கணம்.

கணங்களைப் பொதுவாக ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துகளால் (capital letters) குறிக்கிறோம். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எட்டுக் கணங்களையும் முறையே A, B, C, D, E, F, G, H என்ற எழுத்துகளால் குறித்தோமானால்,

9 என்பது A-ன் ஓர் உறுப்பாகும். இவ்வுண்மையை '$9 \in A$' என எழுதுகிறோம். இதை '9 ஆனது A ஐச் சேர்ந்தது' என்றும் '9 ஆனது A-ல் உள்ளது' என்றும் படிக்கிறோம். இதேபோல், எ $\in B$, பீகார் $\in C$, இந்தியா $\in D$, ஆடி $\in E$, மஞ்சள் $\in F$, $2 \in G$, $4 \in H$.

7 என்பது A-ன் உறுப்பல்ல. இந்த உண்மையை '$7 \notin A$' என எழுதுகிறோம். இதேபோன்று, க $\notin B$, கேரளம் $\notin C$, வெள்ளிக்கிழமை $\notin D$, ஜனவரி $\notin E$, கருப்பு $\notin F$, $12 \notin G$, $1 \notin H$.

2–2. கணங்களை விவரித்தல் (Description of Sets)

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எட்டுக் கணங்களையும் ஊன்றிப் பார்ப்போமானால், கணங்களை எந்தெந்த முறைகளில் விவரிக்கலாம் அல்லது வரையறை செய்யலாம் என்பது நன்கு விளங்கும்.

2–2·1. பட்டியல் முறையில் விவரித்தல் (Description by Roster Method)

முதற் கணமான A ஐ விவரிக்க அதன் உறுப்புகளான 6, 8 9 என்பவை பட்டியல் செய்யப்பட்டிருந்தன. இந்த விதமாக, ஒரு கணத்தை அதன் உறுப்புகளைப் பட்டியல் செய்து விவரிப்பதைப் பட்டியல் முறையில் விவரித்தல் (description by roster method or tabular form method) என்கிறோம். இம் முறையில் ஒரு கணத்தை எழுத, அதன் உறுப்புகளை வில்லடைப்புகளுக்கு (braces) உள்ளே எழுதுகிறோம். ஓர் உறுப்பிலிருந்து அடுத்து வரும் உறுப்பைப் பிரித்துக் காட்ட, இரண்டிற்கும் இடையே காற்புள்ளி (comma) இடுகிறோம். சான்றாக,

$$A = \{6, 8, 9\}$$

ஒரு கணத்தை மேலே சொல்லப்பட்ட வடிவில் எழுதும் பொழுது, அதை அக் கணத்தின் பட்டியல் வடிவம் (tabular form) என்கிறோம். பட்டியல் வடிவில்,

B = {இ, ஊ, எ, அ, ஓ},

C = {தமிழ் நாடு, பீகார், ஆந்திரம்}

2–2 2. சிறப்புப் பண்பு முறையில் விவரித்தல் (Description by Characteristic Property Method)

கணம் D-ல் உள்ள உறுப்புகளில் சூரியன் ஒரு நட்சத்திரம், 5 ஓர் இயற்கை எண், நைல் ஓர் ஆறு, இந்தியா ஒரு நாடு, திருக்குறள் ஒரு நூல். எனவே, உறுப்புகளுக்கிடையே எந்த விதமான தொடர்பும் இல்லை. கணம் C-ன் உறுப்புகள் தமிழ் நாடு, பீகார், ஆந்திரம். இவைகள் இந்திய மாநிலங்கள் என்பதைத் தவிர இவைகளுக்கிடையே வேறு எந்தத் தொடர்பும் இருப்பதாகத் தெரியவில்லை. ஆனால் E, F, G, H என்ற நான்கு கணங்களையும் ஊன்றிப் பார்ப்போமானால், அவை ஒவ்வொன்றிலு முள்ள உறுப்புகளுக்கும் ஒரு சிறப்புப் பண்பு (characteristic property) இருப்பது தெரியவரும். சான்றாக, வானவில்லின் எல்லா வண்ணங்களின் கணம் F ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். அதன் உறுப்புகள் வானவில்லின் வண்ணங்கள்; இவை தவிர வேறு எந்தப் பொருளும் அதன் உறுப்பல்ல. எனவே, அதன் உறுப்பு களின் சிறப்புப் பண்பு 'வானவில்லின் வண்ணம்'. இந்த விதமாக ஒரு கணத்தை அதன் உறுப்புகளின் சிறப்புப் பண்பைக் கூறி விவரிப்பதைச் சிறப்புப் பண்பு முறையில் விவரித்தல் (description by characteristic property method) என்கிறோம். இம்முறையை வரையறைப் பண்பு முறை (defining property method) என்றும் அழைக்கிறோம். இம் முறையில் ஒரு கணத்தை எழுத, அதன் உறுப்புகளின் சிறப்புப் பண்பை வில்லடைப்புகளுக்குள் எழுது கிறோம். அந்தச் சிறப்புப் பண்பைக் கொண்ட பொருள்கள் மட்டுமே அதன் உறுப்புகள். இந்த அடிப்படையில்,

$F = \{ x \mid x$ வானவில்லின் ஒரு வண்ணம்$\}$ என எழுது கிறோம். இதை

'x ஆனது வானவில்லின் ஒரு வண்ணமாக இருக்கும் படியுள்ள எல்லா x களின் கணம் F' என்று படிக்க வேண்டும். குறியீட்டில் வரும் முதல் x ஐ 'எல்லா x' என்றும், '|' என்ற நிலைக்குத்துக் கோட்டை (vertical line) 'என இருக்கும்படி யுள்ள (such that)' என்றும் படிக்க வேண்டும்.

ஒரு கணத்தை மேற் சொன்ன வடிவில் எழுதும்பொழுது, அவ் வடிவைக் கணம் கட்டும் வடிவம் (set builder from) என்கிறோம். கணம் கட்டும் வடிவில்,

$E = \{x \mid x$ ஒரு தமிழ் மாதம்$\}$,

$G = \{x \mid (x$ ஓர் இயற்கை எண்$) \wedge (1 \leqslant x \leqslant 5)\}$,

$H = \{x \mid x$ ஆனது $x^2 - 7x + 12 = 0$ என்ற சமன் பாட்டின் ஒரு மூலம்$\}$.

H ஐச் சுருக்கமாக,

$H = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$ என எழுதுவதும் உண்டு.

சிலர் '$\mid$' என்ற நிலைக்குத்துக் கோட்டிற்குப் பதிலாக ':' என்ற முக்காற் புள்ளியைப் (colon) பயன்படுத்துகின்றனர். அவர்களின் வழக்கப்படி,

$F = \{x : x$ வானவில்லின் ஒரு வண்ணம்$\}$

ஒரு கணத்தைச் சிறப்புப் பண்பு முறையில் எழுத இன்னு மொரு முறை கையாளப்படுகிறது. இம் முறைப்படி,

$F = \{$வானவில்லின் வண்ணங்கள்$\}$,

$E = \{$தமிழ் மாதங்கள்$\}$,

$G = \{$ 1 முதல் 5 முடிய உள்ள இயற்கை எண்கள்$)$,

$H = \{x^2 - 7x + 12 = 0$ என்பதன் மூலங்கள்$\}$.

கணக் கொள்கையில் சில கணங்கள் திரும்பத் திரும்ப வரு கின்றன. எனவே, அவைகளையும் அவைகளின் தனிக் குறிகளை யும் (special symbols) கீழே தருகிறோம்.

$N_n = \{1$ முதல் n முடிய உள்ள இயற்கை எண்கள்$\}$

$N = \{$இயற்கை எண்கள்$\}$

$Z = \{$முழு எண்கள் (Integers)$\}$

$Q = \{$விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)$\}$

$R = \{$மெய் எண்கள் (Real Numbers)$\}$

$C = \{$சிக்கல் எண்கள் (Complex Numbers)$\}$

2-3. சம கணங்களும் சமமில் கணங்களும் (Equal Sets and Unequal Sets)

2-3·1. வரையறை

கணம் A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் B-லும், B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A-லும் இருந்தால் இருந்தால்தான், A-ம்

B-ம் சம கணங்கள் (equal sets) எனப்படும். அவற்றின் சமத்தன்மையை (equality),

$A = B$ என எழுதுகிறோம்.

குறியீட்டு முறையில்,

$[(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A)] \Longleftrightarrow A = B$

அதாவது,

2–3·2.

$$(x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow A = B.$$

சம கணங்களின் வரையறையை அறிந்த நமக்கு அவைகளுக்கிடையே எவையேனும் தொடர்புகள் உண்டா என்ற கேள்வி எழுவது இயற்கையே. அடுத்து வரும் தேற்றம் அதற்கு விடையாய் அமையும்.

2–3·3. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது,

(a) $A = A$

(b) $A = B \Longrightarrow B = A$

(c) $A = B \wedge B = C \Longrightarrow A = C$

நிறுவல்

(a) $x \in A \Longleftrightarrow x \in A$ [1–10·9-ன் படி]

எனவே, 2–3·2-ன் படி, $A = A$

(b) $A = B$ (எடுகோள்)

$\therefore (x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A)$ [2–3·1-ன் படி]

$\therefore (x \in B \Longrightarrow x \in A) \wedge (x \in A \Longrightarrow x \in B)$ [1–10·12(a)-ன் படி]

$\therefore B = A$ [2–3·1-ன் படி]

(c) $A = B$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–3·1-ன் படி,

$x \in A \Longrightarrow x \in B$ ... (1)

மற்றும் $x \in B \Longrightarrow x \in A$ ... (2)

$B = C$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–3·1-ன் படி,

$$x \in B \Longrightarrow x \in C \quad \ldots (3)$$

$$x \in C \Longrightarrow x \in B \quad \ldots (4)$$

(1), (3)-லிருந்து, $x \in A \Longrightarrow x \in C$...(5) [1–10·8-ன் படி]

(4), (2)-லிருந்து, $x \in C \Longrightarrow x \in A$...(6) [1–10·8-ன் படி]

(5), (6)-லிருந்து, $A = C$ [2–3·1-ன் படி]

எந்த ஒரு கருத்தும் (concept) மனத்தில் நன்ருகப் பதியச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் தேவை. எனவே, கணங்களின் சமத் தன்மை (equality of sets) என்ற கருத்தை நன்ருகப் புரிந்து கொள்ள, சில எடுத்துக்காட்டுகள் தருகிறேம்.

2–3·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{9,6,8\}$, $B = \{8,9,6\}$ எனில், அப்பொழுது $A = B$. ஏனென்ருல், A-ன் உறுப்புகளான 9, 6, 8 என்பவை ஒவ்வொன்றும் B-லும், B-ன் உறுப்புகளான 8, 9, 6 என்பவை ஒவ்வொன்றும் A-லும் உள்ளன. இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை வரிசை மாற்றி எழுதுவதால் அது மாருது என்பது விளங்கும். எனவே,

$$\{9, 6, 8\} = \{9, 8, 6\} = \{6, 8, 9\} = \{6, 9, 8\} = \{8, 6, 9\} = \{8, 9, 6\}.$$

2–3·5. எடுத்துக்காட்டு

A = {க, ட, ம்}, B = {க, ட, க, ம்} எனில், அப்பொழுது, $A = B$. ஏனென்ருல், A-ன் உறுப்புகளான க, ட, ம் என்பவை ஒவ்வொன்றும் B-லும், B-ன் உறுப்புகளான க, ட, க, ம் என்பவை ஒவ்வொன்றும் A-லும் உள்ளன. இந்த எடுத்துக்காட்டிலிருந்து ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளைத் திரும்பத் திரும்ப எழுதுவதால் அது மாருது என அறிகிறேம்.

2–3·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{3, -3\}$, $B = \{-3, 3, -3, -3, 3\}$,

$C = \{x \mid x^2 = 9\}$ எனில், அப்பொழுது $A = B = C$.

2–3·7. சமமில் கணங்கள் (Unequal Sets)

$[(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in A)] \Longleftrightarrow A = B$ என அறிவோம். எனவே, A-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு B-ல் இல்லாமலோ அல்லது B-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு A-ல் இல்லா

மலோ இருந்தால் இருந்தால்தான், A-ம் B-ம் சமமில் கணங்கள் (unequal sets) ஆகும். அப்பொழுது $A \neq B$ என எழுதுகிறோம்.

குறியீட்டில்,

2–3·8. $[(\exists x \ni A \in x \notin B) \vee (\exists y \in B \ni y \notin A)] \Longleftrightarrow A \neq B$

கீழ்வருபவை சமமில் கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

2–3·9. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{7, 5\}$ எனில், அப்பொழுது $A \neq B$. ஏனென்றால், $3 \in A$ ஆனால் $3 \notin B$.

2–3·10. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{3, 1, 9\}$, $B = \{2, 9, 3, 1\}$ எனில், அப்பொழுது $A \neq B$. ஏனென்றால், $2 \in B$ ஆனால் $2 \notin A$.

2–3·11. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{8, 5, 17\}$, $B = \{$புதன், திங்கள், சனி$\}$, எனில் அப்பொழுது $A \neq B$.

இதுவரை ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைப் பற்றி நாம் கவலைப்படவில்லை. இனி, உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையை வைத்துக் கணங்களை எப்படி வகைப்படுத்தலாம் எனக் காண்போம்.

2–4. முடிவுள்ள கணங்களும் முடிவில்லாக் கணங்களும் (Finite Sets and Infinite Sets)

2–4·1. வரையறை

ஒரு கணத்தின் தனித்தனி (distinct) உறுப்புகளை ஒன்று, இரண்டு, மூன்று, ... என எண்ணிக்கொண்டு (count) வரும் பொழுது, ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணுடன் (specific number) எண்ணுதல் (counting) முடிவுற்றால், அக் கணம் ஒரு முடிவுள்ள கணம் (finite set) எனப்படும்.

கீழ்வருபவை முடிவுள்ள கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

2–4·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$ ஒரு முடிவுள்ள கணம். ஏனென்றால், A-ல் 3, 5 என்ற இரு உறுப்புகளே உள்ளன.

2–4·3. எடுத்துக்காட்டு

B = {தமிழ்ப் பெரும் காப்பியங்கள்} ஒரு முடிவுள்ள கணம். ஏனென்றால், B-ல் சிலப்பதிகாரம், மணிமேகலை, சீவக சிந்தாமணி, வளையாபதி, குண்டலகேசி என்ற ஐந்து உறுப்புகளே உள்ளன.

2–4·4. எடுத்துக்காட்டு

C = {திருக்குறளில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள சொற்கள்} எனில், C-ன் உறுப்புகளை ஒவ்வொன்றாக எண்ணுவது சிறிது கடினமாக இருக்கலாம். இருப்பினும் C ஒரு முடிவுள்ள கணமே!

முடிவுள்ள கணங்களிலும் உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் சில சிறப்புக் கணங்கள் உள்ளன. அவைகளுள் ஒன்று ஒருறுப்புக் கணம்.

2–4·5. வரையறை

ஒரே ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்ட கணம் ஒருறுப்புக் கணம் (singleton or unit set) எனப்படும்.

கீழ்வருபவை ஒருறுப்புக் கணத்திற்குச் சில எடுத்து காட்டுகள்.

2–4·6. எடுத்துக்காட்டு

A = {இ}

2–4·7. எடுத்துக்காட்டு

$B = \{0\}$

2–4·8. எடுத்துக்காட்டு

$C = \{x \mid x$ தா்கா என்ற சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$

2–4·9. எடுத்துக்காட்டு

$D = \{x \mid x + 3 = 5\}$

அடுத்து, முடிவுள்ள கணங்களில் மற்றொரு சிறப்புக் கணத்தைப் பார்ப்போம்.

E = {35 நாட்கள் கொண்ட தமிழ் மாதங்கள்} எனில், அப்பொழுது E-ல் உறுப்புகளே இல்லை. ஏனென்றால், எந்தத் தமிழ் மாதத்திற்கும் 35 நாட்கள் கிடையாது. ஆகவே, E ஒரு சிறப்புக் கணமே!

2–4·10. வரையறை

எந்த ஓர் உறுப்பும் இல்லாத கணம் ஒரு வெற்றுக் கணம் அல்லது உறுப்பில் கணம் அல்லது பூச்சியக் கணம் (empty set, null set, void set or vacuous set) எனப்படும்.

கீழ்வருபவை வெற்றுக் கணத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

2–4·11. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{x \mid x$ ஒரு முழு எண் $\wedge\ 5 < x < 6\}$

2–4·12. எடுத்துக்காட்டு

$B = \{x \mid 2x = 4 \wedge x^2 = 9\}$

2–4·13. எடுத்துக்காட்டு

$C = \{x \mid x = 0 \wedge x = 1\}$

2–4·14. எடுத்துக்காட்டு

$D = \{x \mid x \neq x\}$

ஒரு வெற்றுக் கணம் என்றால் என்ன என்று அறிந்த நமக்கு மொத்தத்தில் எத்தனை வெற்றுக் கணங்கள் உள்ளன என்ற கேள்வி இயல்பாகத் தோன்றும். இதற்கு அடுத்து வரும் தேற்றம் பதில் சொல்லும்.

2–4·15. தேற்றம்

ஓரே ஒரு வெற்றுக் கணம் தான் உண்டு. அதாவது, E, E' என்பன இரு வெற்றுக் கணங்கள் எனில், அப்பொழுது $E = E'$.

நிறுவல்

முடியுமானால், $E \neq E'$ என இருக்கட்டும். அப்பொழுது 2–3·8-ன் படி, கீழ்வரும் இரு கூற்றுகளில் ஒன்று கண்டிப்பாய் உண்மையாய் இருக்கவேண்டும்.

1. $\exists x \in E \ni x \notin E'$
2. $\exists y \in E' \ni y \notin E$

ஆனால் இரு கூற்றுகளுமே பொய். ஏனென்றால், E, E' என்ற இரு கணங்களிலும் உறுப்புகளே இல்லை. எனவே, $E \neq E'$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore\ E = E'$

ஒரே ஒரு வெற்றுக் கணம் தான் உண்டு என நிறுவினோம். எனவே, அதற்கு ஒரு குறியீடு இருந்தால் நலமாக இருக்கும். ஆகவே, அதை ϕ அல்லது { } எனக் குறிக்கிறோம்.

முடிவுள்ள கணம் என்பதிலிருந்து முடிவில்லாக் கணம் (infinite set) உண்டு என்பதை ஊகிக்கலாம்.

2–4·16. வரையறை

ஒரு கணம் முடிவுள்ள கணமாக இல்லாவிட்டால், அது ஒரு முடிவில்லாக் கணம் (infinite set) எனப்படும்.

கீழ்வருபவை முடிவில்லாக் கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

2–4·17. எடுத்துக்காட்டு

N = {இயற்கை எண்கள்}

2–4·18. எடுத்துக்காட்டு

Z = {முழு எண்கள்}.

2–4·19. எடுத்துக்காட்டு

$E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

2–4·20. எடுத்துக்காட்டு

$P = \{x \mid x$ ஒரு நேர் பகா எண் (prime number) $\}$

x, y என்பவை இரு குறிப்பிட்ட மெய் எண்கள் எனில், அப்பொழுது $x = y$, $x < y$, $x > y$ என்ற மூன்றில் ஒன்று மட்டுமே உண்மை. எனவே, மெய் எண்களுக்கிடையே சமத் தன்மை (equality) என்ற தொடர்பைத் தவிர, $<$ (சிறியது), $>$ (பெரியது) என்ற தொடர்புகளும் இருக்கின்றன. இவை தவிர $\leqslant$, $\geqslant$ என்ற தொடர்புகளும் உண்டு. இதே போன்று, கணங் களுக்கிடையேயும் சமத்தன்மை தவிர வேறு தொடர்புகள் உள்ளனவா எனப் பார்ப்போம்.

2–5. உட்கணங்களும் உள்ளடக்கும் கணங்களும் (Subsets and Super sets)

2–5·1. வரையறை

கணம் A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் B-ல் இருந்தால் இருந்தால்தான், A ஆனது B-ன் ஓர் உட்கணம் (subset) எனப் படும்.

'A ஆனது B-ன் உட்கணம்' என்பதை,

$A \subset B$ எனக் குறிக்கிறோம். இதை

'A ஆனது B-ல் அடங்குகிறது' என்றும்,

'A ஆனது B-ல் உள்ளடங்கும் கணம்' என்றும் படிக்கிறோம். குறியீட்டு முறையில்,

2–5·2. $(x \in A \Longrightarrow x \in B) \Longleftrightarrow A \subset B$

$\subset$ என்ற தொடர்புக்குக் கண அடங்கல் (set inclusion) என்பது பெயர்.

2–5·3. கருத்துரை (Remark)

A என்பது எந்த ஒரு வெற்றற்ற கணம் (non-empty set) என்றாலும், அப்பொழுது $A \subset A$. ஏனென்றால், 1–10·9-ன் படி $x \in A \Longrightarrow x \in A$.

2–5·4. வரையறை

கணம் A ஆனது, கணம் B-ன் ஓர் உட்கணமாக இருந்தால் இருந்தால்தான், B ஆனது A ஐ உள்ளடக்கும் ஒரு கணம் (super set) எனப்படும்.

'B ஆனது A ஐ உள்ளடக்கும் கணம்' என்பதை $B \supset A$ என்று குறிக்கிறோம். இதை,

'B ஆனது A ஐ உள்ளடக்குகிறது' என்றும் படிக்கிறோம்.

கீழ்வருபவை உட்கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

2–5·5. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2, 5\}$, $B = \{1, 5, 8, 2\}$ எனில், அப்பொழுது $A \subset B$. ஏனென்றால், A-ன் உறுப்புகளான 2, 5 என்பவை ஒவ்வொன்றும் B-ல் உள்ளன.

2–5·6. எடுத்துக்காட்டு

$C = \{3, 7, 4\}$, $D = \{7, 3, 4\}$ எனில், அப்பொழுது $C \subset D$. ஏனென்றால், C-ன் உறுப்புகளான 3, 7, 4 என்பவை ஒவ்வொன்றும் D-ல் உள்ளன.

2–5·7. எடுத்துக்காட்டு

$N_n \subset N \subset Z \subset Q \subset R$

$(x \in A \Longrightarrow x \in B) \Longrightarrow A \subset B$ என அறிவோம். எனவே A-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பாவது B-ல் இல்லை என்றால் என்றால் தான், A ஆனது B-ன் உட்கணமல்ல. இதை $A \not\subset B$ என எழுதுகிறோம். குறியீட்டில்,

2–5·8. $(\exists\, x \in A \ni x \notin B) \Longleftrightarrow A \not\subset B$

இந்த முடிவு அடுத்த தேற்றத்தை நிறுவத் துணை செய்யும்.

2–5·9. தேற்றம்

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது $\phi \subset A$.

நிறுவல் :

முடியுமானால், $\phi \not\subset A$ என இருக்கட்டும். அப்பொழுது 2–5·8-ன் படி, $\exists\, x \in \phi \ni x \notin A$. ஆனால் $x \notin \phi$. ஏனென்றால், ϕ-ல் உறுப்புகளே இல்லை. எனவே, $\phi \not\subset A$ என இருக்க முடியாது.

$$\therefore \quad \phi \subset A.$$

A, B, C என்பவை மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது $A = B \wedge B = C \Longrightarrow A = C$ என அறிவோம். இதில் $=$ என்ற குறிக்குப் பதில் $\subset$ என்ற குறியும் பொருந்தும் என்பதை அடுத்த தேற்றம் மெய்ப்பிக்கும்.

2–5·10. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$$

நிறுவல் :

$A \subset B$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–5·2-ன் படி, $x \in A \Longrightarrow x \in B$ ...... (1)

$B \subset C$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–5·2-ன் படி, $x \in B \Longrightarrow x \in C$ ...... (2)

(1), (2) லிருந்து, $x \in A \Longrightarrow x \in C$ [1–10·8-ன் படி]

$\therefore \quad A \subset C$ [2–5·2-ன் படி]

2–5·10-ல் $C = A$ என இருந்தால், அப்பொழுது A-க்கும் B-க்கும் உள்ள தொடர்பை அடுத்துக் காண்போம்.

2–5·11. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது $A \subset B \wedge B \subset A \Longleftrightarrow A = B$.

நிறுவல்:

பாகம் 1 : $A \subset B \wedge B \subset A \Longrightarrow A = B$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \subset B$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–5·2-ன் படி, $x \in A \Longrightarrow x \in B$ ...... (i)

$B \subset A$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–5·2-ன் படி, $x \in B \Longrightarrow x \in A$ ...... (ii)

(i), (ii) லிருந்து, $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$

$\therefore A = B$ [2–3·2-ன் படி]

பாகம் 2 : $A = B \Longrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ என நிறுவ வேண்டும்.

2–5·3, மற்றும் 2-5·9-ன் படி, $A \subset A$, $B \subset B$

ஆனால் $A = B$ (எடுகோள்)

$\therefore A \subset B, B \subset A$.

$A \subset B$ என்க. $B \subset A$, $B \not\subset A$ என்ற இரண்டில் ஒன்று தான் உண்மை. $B \subset A$ எனில், 2–5·11-லிருந்து $A = B$. $B \not\subset A$ எனில், $A \neq B$. எனவே, $A \subset B \wedge A = B$, $A \subset B \wedge A \neq B$ என்ற இரண்டில் ஒன்று தான் உண்மை. இதிலிருந்து உட்கணங்களை இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம் என அறிகிறோம். அவைகளின் பெயர்களையும் அவைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளையும் அடுத்துக் காண்போம்.

2–5·12. வரையறை

A, B என்ற கணங்கள் $A \subset B$, $A \neq B$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், *A* ஆனது *B*-ன் ஒரு முறையான உட்கணம் அல்லது சரியான உட்கணம் (proper subset) எனப்படும்.

இவ் வரையறையிலிருந்து, *A* ஆனது *B*-ன் ஒரு முறையான உட்கணம் என்று நிறுவ, *A*-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் *B*-ல் உள்ளது என்றும், *B*-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பாவது *A*-ல் இல்லை என்றும் காட்டவேண்டும். குறியீட்டில்,

2–5·13. A ஆனது B-ன் ஒரு முறையான உட்கணம்

$$\Longleftrightarrow [(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (\exists y \in B \ni y \notin A)]$$

கீழ் வருபவை முறையான உட்கணத்திற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

2–5·14. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2, 7, 5\}$, $B = \{1, 7, 2, 3, 5\}$ எனில், அப்பொழுது A ஆனது B-ன் ஒரு முறையான உட்கணம்.

2–5·15. எடுத்துக்காட்டு

N ஆனது Z-ன் ஒரு முறையான உட்கணம்.

2–5·16. எடுத்துக்காட்டு

A = {சதுரங்கள்}, B = {செவ்வகங்கள்} எனில், அப்பொழுது A ஆனது B-ன் ஒரு முறையான உட்கணம்.

2–5·17. எடுத்துக்காட்டு

A, B என்ற இரு கணங்கள் $A \subset B \wedge B \subset A$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், அதாவது $A = B$ என இருந்தால் இருந்தால் தான், ஒன்று மற்றதன் முறையற்ற உட்கணம் அல்லது சரியற்ற உட்கணம் (improper subset) எனப்படும்.

2–5·18. முறையற்ற உட்கணத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2, 7, 3\}$. $B = \{3, 2, 7\}$ எனில், அப்பொழுது ஒன்று மற்றதன் முறையற்ற உட்கணம்.

a, b என்பன இரு மெய் எண்கள் எனில், அப்பொழுது $a \leqslant b \vee b \leqslant a$. ஆகவே, எந்த இரு மெய் எண்களையும் '$\leqslant$' ஆல் ஒப்பிட முடியும். இதேபோல், எந்த இரு கணங்களையும் '$\subset$' ஆல் ஒப்பிட முடியுமா எனப் பார்ப்போம்.

$A = \{3, 8\}$, $B = \{8, 3, 5\}$ எனில், அப்பொழுது $A \subset B$. எனவே, A-ம், B-ம் '$\subset$' ஆல் ஒப்பிடத் தக்கவை.

$C = \{3, 5, 2, 8\}$, $D = \{3, 2, 8, 7, 1\}$ எனில், அப்பொழுது $5 \in C$; ஆனால் $5 \notin D$. எனவே, $C \not\subset D$. $7 \in D$ ஆனல் $7 \notin C$. எனவே, $D \not\subset C$. ஆகவே, C-ம் D-ம் '$\subset$' ஆல் ஒப்பிடத் தகாதவை.

2–5·19. வரையறை

A, B என்ற இரு கணங்கள் $A \subset B \vee B \subset A$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், *A*-ம் *B*-ம் ஒப்பிடத்தக்க கணங்கள் (comparable sets) எனப்படும்.

2–5·20. வரையறை

A, B என்ற இரு கணங்கள் $A \not\subset B \wedge B \not\subset A$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், *A*-ம் *B*-ம் ஒப்பிடத்தகாத கணங்கள் எனப்படும்.

2–6. முழுமைக் கணம் (Universal Set)

பொதுவாக, நாம் எல்லாக் கணங்கள் மீதும் அக்கறை காட்டுவதில்லை. ஒரு பொருளை ஆராயும் பொழுது நம் கவனமெல்லாம் ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தின் உட்கணங்கள் மீதே இருக்கும். அத்தகைய கணத்திற்கு முழுமைக் கணம் அல்லது பெருங் கணம் (universal set or universe of discourse) என்பது பெயர். தொடக்கநிலை எண் கொள்கையில் (elementary number theory) Z தான் முழுமைக் கணம். சமுதாய வாழ்க்கை இயலில் (sociology) எல்லா மக்களின் கணம் முழுமைக் கணமாகும். மாணவர்கள் சஞ்சிகை படிக்கும் வழக்கத்தைப் பற்றிய ஆய்வில், ஆய்வுக்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் கணமே முழுமைக் கணம்.

மொத்தத்தில் ஒரே ஒரு வெற்றுக் கணம் தான் உண்டு. எனவே, இதற்கு ϕ என்ற சிறப்புக் குறியீட்டைக் கொடுத்தோம். ஆனால் முழுமைக் கணம் என்பது நாம் ஆய்வு செய்யும் பொருளைப் பொறுத்தது. ஆய்வுப் பொருள் மாறினால், முழுமைக் கணமும் மாறும். இருப்பினும் ஒரு முழுமைக் கணத்தை U என்ற எழுத்தால் குறிக்கிறோம்.

2–6·1. கருத்துரை

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது $A \subset U$.

2·7. கணக் குடும்பம் (Family of Sets)

நாம் ஊருக்குப் போகும் பொழுது எடுத்துச் செல்லும் பெட்டிக்குள் சட்டை, வேட்டி, துண்டு, சீப்பு, கண்ணாடி போன்ற தனித்தனி உருப்படிகள் தவிர, சில பெட்டிகளும் இருக்கலாம். இதேபோல் கணங்களிலும் உண்டு. சான்றாக,

$A = \{5, 2, \{7\}, \phi, 9, \{1, 2, 10\}, 7\}$

என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொண்டால், இதன் உறுப்புகளில் $\{7\}, \phi, \{1, 2, 10\}$ என்பவை கணங்கள். மீதமுள்ள 5, 2, 9, 7 என்பவை கணங்களல்ல. A போன்ற கணங்கள் அவ்வளவாகப் பயன்படுவதில்லை. ஆனால் கணங்களை மட்டுமே உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணங்கள் பயனுள்ளவையாய் இருக்கும். எனவே, அவைகளைப் பற்றி நன்றாகத் தெரிந்து கொள்வோம்.

2–7·1. வரையறை

ஒரு கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரு கணமாக இருந்தால் இருந்தால்தான், அதை ஒரு கணக் குடும்பம் (family of sets) என்கிறோம்.

கீழ்வருபவை கணக் குடும்பங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

2–7·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{\{7, 2\}, \{0\}, \phi, \{6, 8, 3\}, \{8\}\}$ ஒரு கணக் குடும்பம்.

2–7·3. எடுத்துக்காட்டு

$B = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ஒரு கணக் குடும்பம்.

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது $\phi \subset A$ என்றும், $A \subset A$ என்றும் அறிவோம். இவ்விரு உண்மைகளையும் நினைவிற் கொண்டு, எடுத்துக்காட்டு 2–7·3ஐ ஊன்றிப் பார்ப்போமானால், B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும், $\{1, 2\}$ என்ற கணத்தின் ஓர் உட்கணம் என்பது விளங்கும். எனவே, கணக் குடும்பங்களில் B போன்றவை ஒரு சிறப்பு வகையைச் சேர்ந்தவை. இத்தகைய கணக் குடும்பங்களைப் பற்றி அடுத்துத் தெரிந்து கொள்வோம்.

2–7·4. வரையறை

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், A-ன் எல்லா உட்கணங்களை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணக் குடும்பத்திற்கு A-ன் அடுக்குக் கணம் (power set) என்பது பெயர்.

A-ன் அடுக்குக் கணத்தை,

2^A அல்லது $P(A)$ எனக் குறிக்கிறோம்.

குறியீட்டில்,

2–7·5. $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$

2–7·6. அடுக்குக் கணத்திற்கு எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$ எனில், அப்பொழுது

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2,\} \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

$P(A)$-ன் உறுப்புகளில் ϕ வெற்றுக் கணம்; $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ என்பவை ஓருறுப்புக் கணங்கள்; $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$, என்பவை ஈருறுப்புக் கணங்கள்; A மூவுறுப்புக் கணம். ஒரு முடிவுள்ள கணத்தின் அடுக்குக் கணத்தைப் பட்டியல் வடிவில் எழுத, இந்த எடுத்துக்காட்டில் கையாண்ட முறையைப் பின்பற்றுவது நலமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2–7·6-லிருந்து, ஒரு கணத்தில் மூன்று உறுப்புகள் இருந்தால், அதன் அடுக்குக் கணத்தில் எட்டு உறுப்புகள் இருக்கும் என அறிகிறோம். இனி ஒரு முடிவுள்ள கணத்தில் n உறுப்புகள் இருந்தால், அதன் அடுக்குக் கணத்தில் எத்தனை உறுப்புகள் இருக்கும் என அறிய விரும்புவது இயல்பான ஆவலே. அடுத்து வரும் தேற்றம் இதை நிறைவு செய்யும்.

2–7·7. தேற்றம்

A என்ற ஒரு முடிவுள்ள கணத்தில் n தனித்தனி (distinct) உறுப்புகள் இருந்தால், அப்பொழுது $P(A)$-ல் 2^n தனித்தனி உறுப்புகள் இருக்கின்றன.

நிறுவல்:

n தனித்தனிப் பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை ${}_nC_r$ வழிகளில் எடுக்கமுடியும். எனவே, A-ன் உட்கணங்களில் சரியாக (exactly) r உறுப்புகள் கொண்ட கணங்களின் எண்ணிக்கை ${}_nC_r$ ஆகும். மேலும், r-ன் மதிப்பு $0, 1, 2, \ldots, n$ என்பவற்றில் எதாகவும் இருக்கலாம். ஆகவே,

A-ன் உட்கணங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

$$= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ldots + {}_nC_n$$
$$= 2^n$$

ஆனால் A-ன் எல்லா உட்கணங்கள் மட்டுமே $P(A)$-ன் உறுப்புகள். ஆகவே, $P(A)$-ல் 2^n தனித்தனி உறுப்புகள் உள்ளன.

2–7·7-லிருந்து, கணம் A-ன் எல்லா உட்கணங்களின் குடும்பத்தை A-ன் அடுக்குக் கணம் என அழைப்பதற்கும், அதை 2^A எனக் குறிப்பதற்கும் காரணம் விளங்கும்.

2–7.8. கருத்துரை

ஒரு முடிவுள்ள கணத்தின் அடுக்குக் கணமும் ஒரு முடிவுள்ள கணமே.

2–7·9. குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் (Indexed Family of Sets)

ஒரு கணக் குடும்பத்தின் உறுப்புகள் அனைத்தும் கணங்கள் என அறிவோம். அவை ஒவ்வொன்றுக்கும் ஓர் அடையாளம் கொடுத்தோமானால், அவை பற்றிப் பேச ஏதுவாக இருக்கும்.

$A = \{A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta\}$ என்ற கணக் குடும்பத்தின் உறுப்புகளான $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta$ என்ற கணங்களை முறையே $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை அடையாளம் காட்டுகின்றன. இத்தகைய கணக் குடும்பமானது குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் (indexed family of sets) என அழைக்கப்படுகிறது. A ஐப் பொறுத்த வரையில் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை குறிகள் (indices) எனவும், $I = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ என்பது குறிக் கணம் (index set) எனவும், $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta$ என்பவை குறியிடப்பட்ட கணங்கள் (indexed sets) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

$A = \{A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, A_\delta\}$ என்ற குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பத்தைச் சுருக்கமாக,

$\{A_i\}_{i \in I}$ அல்லது $\{A_i \mid i \in I\}$ என எழுதுகிறோம்.

கீழ்வருபவை குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

2–7·10. எடுத்துக்காட்டு

$I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{a, b, d\}$, $A_2 = \{b, c, d, g, h\}$ எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம்.

2–7·11. எடுத்துக்காட்டு

$I = \{a, b, c\}$, $A_a = \{1, 3, 6\}$, $A_b = \{2, 8, 1, 7, 5\}$, $A_c = \{7, 4, 3, 10\}$ எனில், $\{A_i\}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம்.

2–7·12. எடுத்துக்காட்டு

$n \in N$ என்க. $A_n = \{x \mid x \in N \wedge x$ ஆனது n-ன் ஒரு மடங்கு$\}$ என வரையறுக்க. அப்பொழுது,

$A_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,

$A_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,

$A_3 = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$,

....

....

$\{A_i\}_{i \in N}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம்

2–8. மாதிரிக் கணக்குகள்

2–8·1. மாதிரிக் கணக்கு

12, 30 என்ற இரு எண்களின் பொதுக் காரணிகளின் (common factors) கணம் A ஐப் பட்டியல் வடிவில் எழுதுக.

1, –1, 2, –2, 3, –3, 6, –6 என்பவைதாம் 12, 30 என்ற இரு எண்களின் பொதுக் காரணிகள்.

$\therefore \quad A = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$

2–8·2. மாதிரிக்கணக்கு

$A = \{x \mid x \in N \wedge x^2 - 2x + 5 = 0\}$ என்ற கணத்தைப் பட்டியல் வடிவில் எழுதுக.

$x^2 - 2x + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $5, -3$. A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஓர் இயற்கை எண்ணாகவும், $x^2 - 2x + 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகவும் இருக்க வேண்டும். ஆகவே, $5 \in A$, $-3 \notin A$.

$\therefore \quad A = \{5\}$

2–8·3. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{i, -i\}$ என்ற கணத்தைக் கணம் கட்டும் வடிவில் எழுதுக.

$i, -i$ என்ற இரு எண்களும் சிக்கல் எண்கள் (complex numbers). மேலும், இவை இரண்டும் $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்.

$\therefore \quad A = \{x \mid x \in C \wedge x^2 + 1 = 0\}$.

2–8·4. மாதிரிக் கணக்கு

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $A \in B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \in C$ என நிறுவுக.

$B \subset C$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad x \in B \Longrightarrow x \in C$ [2–5·2-ன் படி]

ஆனால் $A \in B$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad A \in C$

2–8·5. மாதிரிக் கணக்கு

$A \subset \phi \Longleftrightarrow A = \phi$ என நிறுவுக.

பாகம் 1 : $A \subset \phi \Longrightarrow A = \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \subset \phi$ (எடுகோள்)

$\phi \subset A$ [2–5·9-ன் படி]

$\therefore \quad A \subset \phi \wedge \phi \subset A$

$\therefore \quad A = \phi$ [2–5·11-ன் படி]

பாகம் 2 : $A = \phi \Longrightarrow A \subset \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A = \phi \Longrightarrow A \subset \phi \wedge \phi \subset A$ [2–5·11-ன் படி]

$\Longrightarrow A \subset \phi$ [1–10·5(a)-ன் படி]

2–8·6. மாதிரிக் கணக்கு

ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஓர் உட்கணமாக இருக்கும்படி ஒரு கணம் அமைக்க.

ϕ, $\{\phi\}$, $\{\{\phi\}\}$, $\{\{\{\phi\}\}\}$ ... ஆகியவற்றை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதன் ஓர் உட்கணம்.

2–8·7. மாதிரிக் கணக்கு

ஒரு தளத்தில் (plane) உள்ள உருவங்களால் ஆன கணங்கள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

A = {முக்கோணங்கள்}

B = {சமபக்க முக்கோணங்கள்}

C = {இருசமபக்க முக்கோணங்கள்}

D = {செங்கோண முக்கோணங்கள்}

E = {இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணங்கள்}

இவைகளில் எவை எவை மற்றெந்தக் கணங்களின் முறையான உட்கணங்கள் ?

ஒவ்வொரு சமபக்க முக்கோணமும் ஒரு முக்கோணம். எனவே, $B \subset A$. ஆனால் ஒவ்வொரு முக்கோணமும் ஒரு சமபக்க முக்கோணமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆகவே, $A \not\subset B$. எனவே, $A \neq B$. ஆகவே, B ஆனது A-ன் ஒரு முறையான உட்கணம். இதேபோல், C D, E என்பன A-ன் முறையான உட்கணங்கள்.

ஒவ்வொரு சமபக்க முக்கோணமும் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம். எனவே, $B \subset C$. ஆனால் இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் எல்லாம் சமபக்க முக்கோணங்கள் அல்ல. ஆகவே, $C \not\subset B$. எனவே, $B \neq C$. ஆகவே, B ஆனது C-ன் ஒரு முறையான உட்கணம். இதேபோல், E ஆனது C, D என்ற இரு கணங்களின் முறையான உட்கணம் என நிறுவலாம்.

2–8·8. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{1, \{1, 2,\}\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் யாவை?

A-ல் இரண்டே உறுப்புகள் உள்ளதால், வெற்று உட்கணம், ஓருறுப்பு உட்கணங்கள், ஈருறுப்பு உட்கணம் என்ற மூன்று வகை உட்கணங்கள் தாம் உண்டு. அவை கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

வெற்று உட்கணம்	ϕ
ஓருறுப்பு உட்கணங்கள்	$\{1\}$, $\{\{1, 2\}\}$
ஈருறுப்பு உட்கணம்	A

2–8·9. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{1, 2\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்களில் ஒப்பிடத் தகாதவை யாவை?

ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$ என்ற நான்கு கணங்கள்தாம் A-ன் உட்கணங்கள். $\{1\} \not\subset \{2\}$, $\{2\} \not\subset \{1\}$. எனவே, $\{1\}$, $\{2\}$ என்பவை ஒப்பிடத் தகாதவை. இவை தவிர, வேறு எந்த இரு உட்கணங்களும் ஒப்பிடத் தக்கவை.

2–8·10. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{1, \{1, 2\}, \{3\}\}$ எனில், $P(A)$ ஐப் பட்டியல் வடிவில் எழுதுக.

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{3\}\}, \{1, \{1,2\}\}, \{1, \{3\}\}, \{\{1,2\}, \{3\}\}, A\}$$

2–8·11. மாதிரிக் கணக்கு

கீழ்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றும் உண்மையா பொய்யா என்று முடிவு செய்க.

(a) $\{1\} \in \{1, 2\}$

(b) $\{1\} \subset \{1, 2\}$

(c) $1 \subset \{1, 2\}$

(d) $0 \in \phi$

(e) $\phi \subset \phi$

(f) $A = \phi$ எனில், அப்பொழுது $P(A) = \phi$

(a) $\{1\}$ ஆனது $\{1, 2\}$-ன் உறுப்பல்ல. எனவே, கூற்று பொய்யானது.

(b) $1 \in \{1, 2\}$. எனவே, $\{1\}$ ஆனது $\{1,2\}$-ன் ஓர் உட்கணம். ஆகவே, கூற்று உண்மையானது.

(c) 1 என்பது ஒரு கணமல்ல. எனவே, 1 என்பது $\{1, 2\}$-ன் உட்கணம் அல்ல. ஆகவே, கூற்று பொய்யானது.

(d) ϕ-ல் உறுப்புகளே இல்லை. எனவே, கூற்று பொய்யானது.

(e) ϕ ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் உட்கணமாகும். எனவே, கூற்று உண்மையானது.

(f) $A = \phi$ எனில், $P(A) = \{\phi\}$. எனவே, கூற்று பொய்யானது.

பயிற்சி 2

1. கீழ்க்கண்ட வாக்கியங்களைக் கணக் குறியீட்டில் (set notation) எழுதுக.

(a) x ஆனது கணம் A ஐச் சேர்ந்தது.

(b) y ஆனது கணம் B-ல் இல்லை.

(c) z ஆனது கணம் C-ன் உறுப்பு.

(d) கணம் D, கணம் E-ன் உட்கணம்.

(e) கணம் F, கணம் G ஐ உள்ளடக்கும் கணமல்ல.

(f) கணம் P, கணம் M-ல் அடங்கவில்லை.

(g) கணம் L, கணம் S ஐ உள்ளடக்குகிறது.

2. கீழ்க்கண்ட கணங்களைப் பட்டியல் வடிவில் எழுதுக.

(a) 'தமிழ்' என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளின் கணம்.

(b) —5-க்கும், 2-க்கும் இடையேயுள்ள முழு எண்களின் கணம்.

(c) 6-க்கும், 7-க்கும் இடையேயுள்ள இயற்கை எண் களின் கணம்.

(d) 18-ன் நேர்க் காரணிகளின் (positive factors) கணம்.

(e) 48, 56 என்ற எண்களின் பொதுக் காரணிகளின் (common factors) கணம்.

(f) 3 ஆல் வகுபடும் இயற்கை எண்களின் கணம்.

(g) 7 ஆல் வகுபடும் முழு எண்களின் கணம்.

3. கீழ்க்கண்ட கணங்களைப் பட்டியல் வடிவில் எழுதுக.

$A = \{ x \mid x$ ஆனது 543521-ல் உள்ள ஓர் இலக்கம் (digit)$\}$

$B = \{ x \mid x - 2 = 5 \}$

$C = \{ x \mid x = 0 \vee x = 1 \}$

$D = \{ x \mid x \in N \wedge x^2 = 4 \}$

$E = \{ x \mid x$ ஒரு நேர் எண் $\wedge$ x ஓர் எதிர் எண் (negative number)$\}$

$F = \{ x \mid x \in N \wedge x^2 < 10 \}$

$G = \{ x \mid x \in Z \wedge 3x^2 + 7x + 2 = 0 \}$

$H = \{ x \mid x^2 = 9 \wedge x - 3 = 5 \}$

$J = \{ x \mid x \in Q \wedge 2x^2 - 7x + 3 = 0 \}$

$K = \{ x \mid x \in R \wedge x^2 < 0 \}$

$L = \{ x \mid x \in C \wedge x^2 + 4 = 0 \}$

$M = \{ x \mid x = 4n \wedge n \in Z \}$

$P = \{ x \mid x = n^3 \wedge n \in N \}$

4. கீழ்க்கண்ட கணங்களைக் கணம் கட்டும் வடிவில் எழுதுக.

$A = \{ 2 \}$

$B = \{$ அ, ஆ $\}$

$C = \{41, 42, 43, 44\}$

D = { திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி, ஞாயிறு }

$E = \{3, 6, 9, 12, \ldots\ldots\}$

$F = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$G = \{1, \omega, \omega^2\}, \ \omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$H = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$

$J = \{-1, -3, -5, -7, \ldots\}$

$K = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள A, B என்ற கணங்களுக்கு $A = B$, $A \neq B$ என்ற இரண்டில் எது பொருந்தும் ?
   (a) A = { அ, ஆ, இ }, B = { இ, அ, ஆ }
   (b) $A = \{x \mid x$ ஆனது 'காதம்' என்ற சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து $\}$
   $B = \{x \mid x$ ஆனது 'மீதம்' என்ற சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து $\}$
   (c) $A = \{3\}, \ B = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 = 9\}$
   (d) $A = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}, \ B = \{x \mid x - 1 = 0\}$
   (e) $A = \{4, 2\}, \ B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$
   (f) A = { க, ச, த }, B = { க, த, த, க, க, ச }
   (g) $A = \{1, 2\}, B = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 + x - 2 = 0\}$
   (h) $A = \{x \mid x + 3 = 5\}, B = \{x \mid x$ ஓர் இரட்டை நேர் பகா எண் $\}$
   (i) A = { பா, ட, க, ம் }, B = { க, பா, ட, ம் }

6. $A = \{x \mid x$ ஆனது follow என்ற சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$,
   $B = \{x \mid x$ ஆனது wolf என்ற சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$,
   $C = \{x \mid x$ ஆனது flow என்ற சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$,
   $D = \{x \mid x$ ஆனது fowl என்ற சொல்லிலுள்ள ஓர் எழுத்து$\}$ எனில், இவைகளில் சம கணங்கள் எவை ?

கீழ்வரும் கணங்களில் முடிவுள்ள கணங்கள் எவை ?

(a) { மனிதர்கள் }

(b) எல்லா ஒற்றை எண்களின் கணம்

(c) ஒரு தளத்திலுள்ள எல்லா முக்கோணங்களின் கணம்

(d) { 2, 2, 2, 2, ... }

8. கீழ்வரும் கணங்களில் எவையெல்லாம் வெற்றுக் கணம்?

$A = \{ x \mid x + 5 = 5 \}$

$B = \{ x \mid x$ ஓர் இரட்டை எண் $\wedge\ 2 < x < 4 \}$

$C = \{ x \mid x$ ஆனது 'அ'-க்கு முந்திய ஒரு தமிழ் எழுத்து $\}$

$D = \{ 0 \}$

$E = \{ x \mid x$ ஓர் ஒற்றை எண் $\wedge\ x^2 = 4 \}$

$F = \{ x \mid x \in R \wedge x^2 < 0 \}$

$G = \{ \phi \}$

9. $\phi, \{ 0 \}, \{ \phi \}$ என்ற மூன்று கணங்களில், எவை வெவ்வேறானவை?

10. $A = \{ 2, 8, 9, 6, 4 \}$, $B = \{ x \mid x$ ஓர் இரட்டை எண் $\}$ எனில், $A \not\subset B$ என நிறுவுக.

11. கீழ்வரும் கணங்களின் உட்கணங்களை எழுதுக.

(a) $\{ 1 \}$ (c) $\{ \phi, \{ \phi \} \}$

(b) $\{ \phi \}$ (d) $\{ 1, 2, \{ 1, 2 \} \}$

12. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்ற கணத்திற்கு முறையான உட்கணங்கள் எத்தனை?

13. ஒரு தளத்தில் உள்ள உருவங்களால் ஆன கணங்கள் சில கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவைகளில் எவை எவை மற்றெந்தக் கணங்களின் முறையான உட்கணங்கள்?

A = {நாற்கரங்கள்}

B = {இணைகரங்கள்}

C = {சாய் சதுரங்கள்}

D = {செவ்வகங்கள்}

E = {சதுரங்கள்}

14. ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் ஒரு முறையான உட்கணம் உண்டா? உமது முடிவை (conclusion) நிலைநாட்டுக.

15. கீழ்வரும் கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றும் உண்மையா, பொய்யா என முடிவு செய்க.

(a) $3 \in \{2, 3\}$

(b) $2 \in 2$

(c) $\{2\} \in \{2, 3\}$

(d) $7 \subset \{3, 8, 7\}$

(e) $\{7\} \subset \{3, 8, 7\}$

(f) $\{3\} \subset \{1, 2, 4\}$

(g) $\{1, 2\} \supset \{1, 2\}$

(h) $a \in \{\{a\}, a\}$

(i) $a \subset \{a, \{a\}\}$

(j) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$

(k) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$

(l) $\{0\} \neq \phi$

(m) $0 = \phi$

(n) $\phi \in \{\phi\}$

(o) $\phi \subset \{\phi\}$

(p) $\phi \in \{\{\phi\}\}$

(q) $\{2\} \notin \{2\}$

(r) $\{\{4, 5\}\} \subset \{2, \{4, 5\}, 3\}$

(s) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$

(t) $\{\{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$

(u) ஒரு முடிவுள்ள கணத்தின் ஒவ்வோர் உட்கணமும் ஒரு முடிவுள்ள கணம்.

(v) ஒரு முடிவில்லாக் கணத்தின் ஒவ்வோர் உட்கணமும் ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

(w) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற கணத்திற்கு மொத்தம் 32 உட்கணங்கள் உள்ளன.

(x) {அ, ஆ}, {அ, ஆ, இ} என்ற இரண்டும் ஒப்பிடத் தகாத கணங்கள்.

(y) $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ என்ற இரண்டும் ஒப்பிடத் தக்க கணங்கள்.

16. A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், கீழ்க்கண்ட கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றும் உண்மையா பொய்யா என நிறுவுக.

(a) $A \subset B \wedge B = C \Longrightarrow A = C.$

(b) $A \subset B \wedge B = C \Longrightarrow A \subset C$

(c) $A \in B \wedge B \in C \Longrightarrow A \in C,$

(d) $A = B \wedge B \in C \Longrightarrow A \in C.$

(e) $A \in B \wedge B = C \Longrightarrow A \in C.$

(f) $A \subset B \wedge B \in C \Longrightarrow A \in C.$

(g) $A \subset B \wedge B \in C \Longrightarrow B \subset C.$

(h) $A \in B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$

17. கீழ்வரும் கணங்களின் அடுக்குக் கணங்களைப் பட்டியல் வடிவில் எழுதுக.

(a) ϕ (c) $\{\phi\}$

(b) $\{1\}$ (d) $\{\{1\}, \{2\}\}$

18. S என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் எனில், கீழ்க்கண்ட கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றும் உண்மையா, பொய்யா எனக் கூறுக.

(a) $S \in 2^S$ (c) $\{S\} \in 2^S$

(b) $S \subset 2^S$ (d) $\{S\} \subset 2^S$

19. $A = \{x, y, z\}$ எனில், கீழ்க்கண்ட கூற்றுகள் ஒவ்வொன்றும் உண்மையா, பொய்யா எனக் கூறுக.

(a) $\phi \notin A$ (e) $\{x, y\} \notin A$

(b) $\phi \notin 2^A$ (f) $\{x, y\} \notin 2^A$

(c) $x \notin A$ (g) $\{x, y\} \subset A$

(d) $\{x\} \notin 2^A$ (h) $\{x, y\} \subset 2^A$

20. குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பங்கள் இரண்டு தருக.

21. $A \in B, B \in C, A \notin C$ என இருக்குமாறு A, B, C என்ற மூன்று கணங்கள் தருக.

22. $A \subset B, B \in C, C \subset D, D \subset E$ என இருக்குமாறு A, B, C, D, E என்ற ஐந்து கணங்கள் தருக.

23. $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ எனில், $A = B = C$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. (a) $x \in A$
   (b) $y \notin B$
   (c) $z \in C$
   (d) $D \subset E$
   (e) $F \not\supset G$
   (f) $P \not\subset M$
   (g) $L \supset S$

2. (a) {த, மி, ழ்}
   (b) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$
   (c) $\{\quad\}$
   (d) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
   (e) $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$
   (f) $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
   (g) $\{\ldots, -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21 \ldots\}$

3. $A = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
   $B = \{7\}$
   $C = \{0, 1\}$
   $D = \{2\}$
   $E = \{\quad\}$
   $F = \{1, 2, 3\}$
   $G = \{-2\}$
   $H = \{\quad\}$
   $J = \{\frac{1}{2}, 3\}$

$K = \{ \quad \}$

$L = \{2i, -2i\}$

$M = \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$

$P = \{1, 8, 27, 64, \ldots\}$

4. $A = \{ x \mid x$ ஒரு நேர் பகா எண் $\wedge\ x$ ஓர் இரட்டை எண்$\}$

$B = \{ x \mid x =$ அ $\vee\ x =$ ஆ$\}$

$C = \{ x \mid x \in N \wedge 41 \leqslant x \leqslant 44\}$

$D = \{ x \mid x$ ஒரு கிழமை$\}$

$E = \{ x \mid x = 3n \wedge n \in N \}$

$F = \{ x \mid x$ ஆனது 12-ன் ஒரு நேர்க் காரணி $\}$

$G = \{ x \mid x \in C \wedge x^3 = 1\}$

$H = \{ x \mid x = n^2 \wedge n \in N\}$

$J = \{ x \mid$ ஓர் எதிர் ஒற்றை எண்$\}$

$K = \{ x \mid x = 5n \wedge n \in Z\}$

5. (a) $A = B$ (f) $A = B$
(b) $A \neq B$ (g) $A \neq B$
(c) $A \neq B$ (h) $A = B$
(d) $A = B$ (i) $A = B$
(e) $A = B$

6. $A = B = C = D$.

7. (a) முடிவுள்ள கணம். (c) முடிவுள்ள கணமல்ல.
(b) முடிவுள்ள கணமல்ல. (d) முடிவுள்ள கணம்.

8. B, C, E, F.

9. $\phi \neq \{0\}, \phi \neq \{\phi\}, \{0\} \neq \{\phi\}$.

11. (a) $\phi, \{1\}$
(b) $\phi, \{\phi\}$
(c) $\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}$
(d) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{\{1, 2\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2, \{1, 2\}\}, \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

12. 127.

13. B, C, D, E என்பவை A-ன் முறையான உட்கணங்கள். C, D, E என்பவை B-ன் முறையான உட்கணங்கள். E ஆனது C-ன் ஒரு முறையான உட்கணம். E ஆனது D-ன் ஒரு முறையான உட்கணம்.

14. வெற்றுக் கணத்திற்கு முறையான உட்கணம் கிடையாது. மற்றக் கணங்களுக்கு ϕ ஒரு முறையான உட்கணம்.

15. (a) உ (b) பொ (c) பொ (d) பொ (e) உ
(f) பொ (g) உ (h) உ (i) பொ (j) உ
(k) உ (l) உ (m) பொ (n) உ (o) உ
(p) பொ (q) உ (r) உ (s) பொ (t) உ
(u) உ (v) பொ (w) பொ (x) பொ (y) பொ.

17. (a) $\{\phi\}$
(b) $\{\phi, \{1\}\}$
(c) $\{\phi, \{\phi\}\}$
(d) $\{\phi, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}\}$.

18. (a) உ (b) பொ (c) பொ (d) உ.

19. (a) உ (b) பொ (c) பொ (d) பொ
(e) உ (f) பொ (g) உ (h) பொ.

21. $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{\{1\}\}\}$.

22. $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{1, 2\}\}$,
$D = \{\{1, 2\}, 3\}, E = \{\{1, 2\}, 3, 4\}$.

3. கணச் செயல்கள்

(Set Operations)

3–1. முன்னுரை

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ என அறிவோம். அதாவது $\sin x$ ஐ x ஐக் குறித்து வகையிட்டால் (differentiate) $\cos x$ கிடைக்கிறது. வகையிடல் (differentiation) என்பது ஒரு கணிதச் செயல் (mathematical operation). இச் செயலைக் குறிக்கும் குறியீடு $\frac{d}{dx}$ ஆகும். இதைச் செயலி (operator) என்கிறோம். இச் செயலுக் குட்படுவது $\sin x$. இதை ஒரு செயலுட்படுதி (operand) என்கிறோம். செயல் முடிந்தவுடன் கிடைப்பது $\cos x$. இதைச் செயல் விளைவு அல்லது மாறிய-வடிவம் (transform) என அழைக்கிறோம்.

எண் கணிதத்தில் (arithmetic) $4 + 7 = 11$ என அறிவோம். இங்கே கூட்டல் (addition) என்பது கணிதச் செயல்; $+$ என்பது செயலி; 4, 7 என்பவை செயலுட்படுதிகள்; 11 செயல் விளைவு.

ஒரு கணிதச் செயலில் ஒரே ஒரு செயலுட்படுதி மட்டும் இருந்தால், அதை ஒருறுப்புச் செயல் (unary operation) என்றும், இரு செயலுட்படுதிகள் மட்டும் இருந்தால், அதை ஈருறுப்புச் செயல் (binary operation) என்றும், மூன்று செயலுட்படுதிகள் மட்டும் இருந்தால், அதை மூவுறுப்புச் செயல் (ternary operation) என்றும், n செயலுட்படுதிகள் மட்டும் இருந்தால், அதை n-உறுப்புச் செயல் (n-ary operation) என்றும் அழைக்கிறோம்.

வகையிடல் (differentiation), வர்க்கப்படுத்தல் (squaring) என்பவை ஒருறுப்புச் செயல்கள். எண் கணிதக் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்பவை ஈருறுப்புச் செயல்கள்.

இனி, கணச் செயல்களை (set operations) ஒவ்வொன்றாகப் பார்ப்போம்.

3–2. கணங்களின் கூட்டு (Union of Sets or Set Union)

$A = \{1, 3, 8, 5, 9\}$, $B = \{3\ 4, 8, 7\}$ எனில், அப்பொழுது A-ல் மட்டும் உள்ள உறுப்புகள் 1, 5, 9; B-ல் மட்டும்

உள்ள உறுப்புகள் 4, 7; இரண்டிற்கும் பொதுவான உறுப்புகள் 3, 8. ஆகவே, 1, 5, 9, 4, 7, 3, 8 என்பவை A, B என்ற இரு கணங்களில் குறைந்தது ஒரு கணத்தில் உள்ளன. இவைகளை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட புதிய கணம் $\{1, 5, 9\ 4, 7, 3, 8\}$ ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட இரு கணங்களிலிருந்து இந்த முறையில் புதிய கணம் அமைப்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டு முதற் கணச் செயல் வரையறுக்கப்படுகிறது.

3–2·1. வரையறை

A, B என்பவை இரு கணங்கள் எனில், அவைகளில் குறைந்தது ஒரு கணத்தைச் சேர்ந்த உறுப்புகள் அனைத்தையும் மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்திற்கு A, B களின் கூட்டு (union) அல்லது கூட்டுக் கணம் (union set) என்பது பெயர்.

A, B களின் கூட்டை, $A \cup B$ எனக் குறிக்கிறோம். இதை 'A கூட்டு B' என்றும், 'A கோப்பை B' என்றும் படிக்கிறோம்.

$A \cup B$-ன் வரையறையிலிருந்து, கணக் கூட்டு (set union) ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் என்றும், $\cup$ என்பது செயலி என்றும், A-ம் B-ம் செயலுட்படுதிகள் என்றும் அறிகிறோம்.

கணக் குறியீட்டில்,

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

அதாவது,

3–2·2. $x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$

3–2·3. கருத்துரை

$$x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B.$$

கீழ்வருபவை கூட்டுக் கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

3–2·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{7, 5, 2, 6\}$, $B = \{2, 10, 1, 9, 5, 7\}$ எனில், அப்பொழுது $A \cup B = \{7, 5, 2, 6, 10, 1, 9\}$.

3–2·5. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$த, மி, ழ்$\}$, $B = \{$எ, ழு, த், து$\}$ எனில், அப்பொழுது $A \cup B$ $\{$த, மி, ழ், எ, ழு, த், து$\}$.

3–2·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 3, 5, \ldots\}$, $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$ எனில், அப்பொழுது $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6. \ldots \ldots \ldots\} = N$

3–2·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 5, 2\}$, $B = \{2, 6, 3, 4\}$,

$C = \{5, 3, 6, 9, 8, 11\}$ எனில் அப்பொழுது

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 5, 2, 6, 3, 4\} \cup \{5, 3, 6, 9, 8, 11\}$$
$$= \{1, 5, 2, 6, 3, 4, 9, 8, 11\}$$
$$A \cup (B \cup C) = \{1, 5, 2\} \cup \{2, 6, 3, 4, 5, 9, 8, 11\}$$
$$= \{1, 5, 2, 6, 3, 4, 9, 8, 11\}$$

3–3. கணங்களின் இடைவெட்டு (Intersection of Sets or Set Intersection)

$A = \{1, 3, 8, 5, 9\}$, $B = \{3, 4, 8, 7\}$ எனில், அப்பொழுது A, B என்ற இரண்டு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகள் 3, 8 ஆகும். இவைகளை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட புதிய கணம் $\{3, 8\}$. கொடுக்கப்பட்ட இரு கணங்களிலிருந்து இந்த முறையில் புதிய கணம் அமைத்தல், இரண்டாம் கணச் செயலுக்கு அடிப்படையாய் அமைகிறது.

3–3·1. வரையறை

A, B என்பவை இரு கணங்கள் எனில், அவைகள் இரண்டிற்கும் பொதுவான உறுப்புகள் அனைத்தையும் மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்திற்கு A, B களின் இடைவெட்டு (intersection) அல்லது இடைவெட்டுக் கணம் (intersection set) என்பது பெயர்.

A, B களின் இடைவெட்டை,

$A \cap B$ எனக் குறிக்கிறோம். இதை 'A இடைவெட்டு B' என்றும், 'A குல்லாய் B' என்றும் படிக்கிறோம்.

$A \cap B$-ன் வரையறையிலிருந்து, கண இடைவெட்டு (set intersection) ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் என்றும், $\cap$ என்பது செயலி என்றும், A-ம், B-ம் செயலுட்படுதிகள் என்றும் அறிகிறோம்.

கணக் குறியீட்டில்,

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

அதாவது,

3–3·2. $x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$

3–3·3. கருத்துரை

$x \notin A \cap B \iff x \notin A \vee x \notin B$

கீழ்வருபவை இடைவெட்டுக் கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

3–3·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{3, 2, 5\}$, $B = \{7, 8, 5, 10, 2\}$ எனில், அப்பொழுது $A \cap B = \{2, 5\}$.

3–3·5. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{d, e, h, g\}$, $B = \{c, f, e\}$ எனில், அப்பொழுது $A \cap B = \{e\}$.

3–3·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$த, மி, ழ்$\}$, $B = \{$எ, ழு, த், து$\}$ எனில் அப்பொழுது $A \cap B = \{ \}$.

3–3·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ எனில் அப்பொழுது $A \cap B = \{ \}$.

3–3·8. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 8, 6, 7\}$. $B = \{3, 9, 6, 5, 4, 7, 1\}$, $C = \{4, 6, 1\}$ எனில், அப்பொழுது

$$(A \cap B) \cap C = \{1, 6, 7\} \cap \{4, 6, 1\} = \{1, 6\},$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 8, 6, 7\} \cap \{4, 6, 1\} = \{1, 6\}$$

இனி, கணக்கூட்டு, கண இடைவெட்டு என்ற இரு செயல்களும் சம்பந்தப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு ஒன்று பார்ப்போம்.

3–3·9. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 9, 4, 11, 10\}$, $B = \{3, 4, 6, 12, 11\}$, $C = \{2, 6, 11, 5\}$ எனில், அப்பொழுது

$$(A \cup B) \cap C = \{1, 9, 4, 11, 10, 3, 6, 12\} \cap \{2, 6, 11, 5\}$$
$$= \{6, 11\},$$

$$(B \cap C) \cup A = \{6, 11\} \cup \{1, 9, 4, 11, 10\}$$
$$= \{6, 11, 1, 9, 4, 10\},$$

$$(B \cap A) \cup C = \{4, 11\} \cup \{2, 6, 11, 5\}$$
$$= \{4, 11, 2, 6, 5\},$$

$$A \cap (C \cup B) = \{1, 9, 4, 11, 10\} \cap \{3, 4, 6, 12, 11, 2, 5\}$$
$$= \{4, 11\}.$$

3–3·6, 3–3·7 என்ற இரு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் $A \cap B = \phi$ என்பது ஒரு சிறப்பு. அதாவது, A-க்கும் B-க்கும் பொதுவான உறுப்புகளே இல்லை. இதன் அடிப்படையில் அடுத்த வரையறை தரப்படுகிறது.

3–3·10. வரையறை

A, B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகளே இல்லை என்றால் என்றால்தான், அவை இரண்டும் பொது உறுப்பில் கணங்கள் (disjoint sets) அல்லது வெட்டாக் கணங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

குறியீட்டில்,

$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow$ A-ம் B-ம் பொது உறுப்பில் கணங்கள்.

3–3·11. கருத்துரைகள்

$$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow [x \in A \Longrightarrow x \notin B]$$

$$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow [y \in B \Longrightarrow y \notin A]$$

3–4. கண வேறுபாடு (Set Difference)

$A = \{1, 3, 8, 5, 9\}$, $B = \{3, 4, 8, 7\}$ எனில், அப்பொழுது A-ன் உறுப்புகளில் B ஐச் சேராத உறுப்புகள் 1, 5, 9 ஆகும். இவற்றை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்டு $\{1, 5, 9\}$ என்ற புதுக் கணம் அமைக்கலாம். இவ்வாறாக, ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளிலிருந்து இன்னொரு கணத்தின் உறுப்புகளை

நீக்கி விட்டுப் புதுக் கணம் அமைக்கும் முறை மூன்றாவது கணச் செயலை வரையறுக்கத் துணை செய்கிறது.

3–4·1. வரையறை

A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், A-ன் உறுப்புகளில் B ஐச் சேராத உறுப்புகள் அனைத்தையும் மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்திற்கு A, B களின் வேறுபாடு (difference of A and B) என்பது பெயர். இதை B-விருந்து A-ன் வேறுபாடு (difference of A from B) என்றும், A-ல் B-ன் தொடர்புடைய நிரப்பி (relative complement of B in A) என்றும் அழைக்கிறோம். இதை,

$A - B$ எனக் குறிக்கிறோம். இதை 'A வேறுபாடு B' என்றும், "A கழி B' என்றும் படிக்கிறோம்.

$A - B$-ன் வரையறையிலிருந்து, கண வேறுபாடு (set difference) ஓர் ஈருறுப்புச் செயல் என்றும், $-$ என்பது செயலி என்றும், A-ம், B-ம் செயலுட்படுதிகள் என்றும் அறிகிறோம். குறியீட்டில்,

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

அதாவது,

3–4·2. $x \in A - B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

3–4·3. கருத்துரை

$$x \notin A - B \Longleftrightarrow x \notin A \vee x \in B$$

கீழ்வருபவை வேறுபாட்டுக் கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

3–4·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2, 4, 8, 6\}$, $B = \{5, 1, 4, 6, 3\}$ எனில், அப்பொழுது $A - B = \{2, 8\}$, $B - A \{5, 1, 3\}$.

3–4·5. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ தி, ரு, கு, ற, ள் $\}$, $B = \{$ கு, ற, ள், பா$\}$ எனில், அப்பொழுது $A - B = \{$ தி, ரு $\}$, $B - A = \{$ பா $\}$.

3–4·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{8, 5, 10\}$, $B = \{3, 6\}$, எனில் அப்பொழுது $A - B = \{8, 5, 10\}$, $B - A = \{3, 6\}$.

3–4·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, B $\{2, 5\}$, எனில், அப்பொழுது $A - B = \{1, 3, 6\}$, $B - A = \{\ \}$.

3–4·8. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2, 6, 5, 8\}$, $B = \{8, 5, 6, 2\}$ எனில், அப்பொழுது $A - B = \phi$, $B - A = \phi$.

3–4·9. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{3, 7, 11, 6, 5, 8\}$, $B = \{3, 11, 9, 4, 2\}$,

$C = \{1, 9, 8, 2, 5\}$ எனில், அப்பொழுது

$$(A - B) - C = \{7, 6, 5, 8\} - \{1, 9, 8, 2, 5\}$$
$$= \{7, 6\},$$
$$A - (B - C) = \{3, 7, 11, 6, 5, 8\} - \{3, 11, 4\}$$
$$= \{7, 6, 5, 8\}$$

$B - A$ ஐக் காண்பதற்கு $A \subset B$ என இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆனால் $B = U$ (முழுமைக் கணம்) எனில், அப்பொழுது 2–6·1-ன் படி, $A \subset B$. இப்பொழுது $B - A$ என்பது ஒரு சிறப்பான வேறுபாடாகிறது.

3–5. கண நிரப்புதல் (Set Complementation)

3–5·1. வரையறை

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது $U - A$ ஐ A-ன் தனி நிரப்பி (absolute complement) அல்லது சுருக்கமாக A-ன் நிரப்பி (complement) என அழைக்கிறோம்.

A-ன் நிரப்பியைப் பொதுவாக A' ஆல் குறிக்கிறோம். இது $\overline{A}$ என்றும், $\sim A^{c}$ என்றும் குறிக்கப்படுகிறது.

A'-ன் வரையறையிலிருந்து, கண நிரப்புதல் (set complementation) ஓர் ஒருறுப்புச் செயல் என்றும், ' என்பது செயலி என்றும், A ஆனது செயலுட்படுதி என்றும் அறிகிறோம்.

குறியீட்டில்,

$$A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

சுருக்கமாக, $A' = \{x \mid x \notin A\}$.

அதாவது,

3–5·2. $x \in A' \Longleftrightarrow x \notin A$

3–5·3. கருத்துரை

$x \notin A' \Longleftrightarrow x \in A$

கீழ்வருபவை நிரப்பிக் கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

3–5·4. எடுத்துக்காட்டு

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3, 2, 5, 7\}$ எனில், அப்பொழுது $A' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

3–5·5. எடுத்துக்காட்டு

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ எனில், அப்பொழுது $A' = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

கண வேறுபாடு, கண இடைவெட்டு, கண நிரப்புதல் ஆகிய மூன்றிற்கும் இடையேயுள்ள ஒரு சிறப்பான தொடர்பை அடுத்த தேற்றத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்வோம்.

3–5·6. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது $A - B = A \cap B'$

நிறுவல் :

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad [3\text{–}4\cdot 1\text{-ன் படி}]$$

$$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B'\} \quad [3\text{–}5\cdot 2\text{-ன் படி}]$$

$$= A \cap B' . \quad [3\text{–}3\cdot 1\text{-ன் படி}]$$

கண நிரப்புதல் கண வேறுபாட்டின் ஒரு சிறப்பு வகை எனக் கண்டோம். ஐந்தாவது கணச் செயலுக்கும் கண வேறுபாடுதான் அடிப்படை என்பதை அடுத்துக் காண்போம்.

A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், இவைகளிலிருந்து $A - B$, $B - A$ என்ற இரு வேறுபாடுகள் காணலாம். இவை

களைக் கொண்டு, கூட்டு, இடைவெட்டு, வேறுபாடு ஆகிய செயல் களால்,

$(A - B) \cup (B - A)$, $(B - A) \cup (A - B)$, $(A - B) \cap (B - A)$, $(B - A) \cap (A - B)$, $(A - B) - (B - A)$, $(B - A) - (A - B)$ என்ற ஆறு கணங்கள் அமைக்கலாம். இவை ஒவ்வொன்றிலும் $A - B$, $B - A$ என்ற இரு வேறுபாடுகளும் சமச்சீராக (symmetrical) அமைந்துள்ளன. மேற்கூறிய ஆறு கணங்களுள் முதல் இரண்டும் சமம் என நிறுவலாம். மீதமுள்ள நான்கும் முக்கிய மானவை அல்ல. எனவே, A, B என்ற கணங்களிலிருந்து $(A - B) \cup (B - A)$ என்ற புதிய கணம் அமைத்தலை அடுத்த கணச் செயலுக்கு அடிப்படையாகக் கொள்கிறோம்.

3–6. சமச்சீர் வேறுபாடு (Symmetric Difference)

3–6·1. வரையறை

A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், $(A - B) \cup (B - A)$ என்பது A, B-களின் சமச்சீர் வேறுபாடு (symmetric difference) அல்லது பூலியின் தொகை (Boolean sum) என வரையறுக்கப் படுகிறது.

A, B-களின் சமச்சீர் வேறுபாட்டை $A \triangle B$ எனக் குறிக் கிறோம்.

கீழ்வருபவை சமச்சீர் வேறுபாட்டுக் கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

3–6·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2, 4, 8, 6\}$, $B = \{5, 3, 6, 4, 7\}$ எனில்,

அப்பொழுது $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{2, 8\} \cup \{5, 3, 7\}$

$= \{2, 8, 5, 3, 7\}$

3–6·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ எனில், அப்பொழுது

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3–6·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 3, 6, 4, 7\}$, $B = \{3, 7\}$ எனில், அப்பொழுது

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$= \{1, 6, 4\} \cup \{\ \}$$
$$= \{1, 6, 4\}$$

3–6·5. எடுத்துக்காட்டு

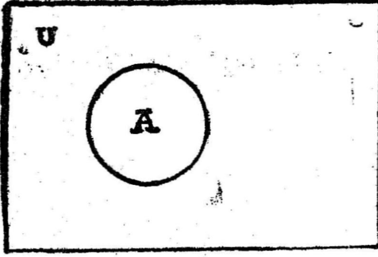
$A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, a, c\}$ எனில், அப்பொழுது

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$= \{\ \} \cup \{\ \}$$
$$= \{\ \}$$

3–7. வென் விளக்கப் படங்கள் (Venn Diagrams)

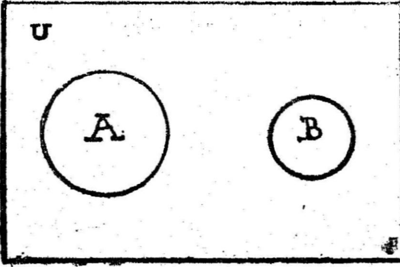
விளக்கப் படங்களின் (diagrams) துணையால் அரிய கருத்துகளையும் எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். இந்த உண்மையை மனத்திற் கொண்டு, கணங்களையும் அவைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளையும் புரிந்து கொள்ள விளக்கப் படங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். கணங்களையும் உட்கணங்களையும் வட்டப் பரப்புகளால் (circular regions) குறிக்கும் முறையை சுவிசு நாட்டுக் கணித அறிஞர் ஆய்லர் (Euler) *[1707—1783]* அறிமுகப் படுத்தினர். எனவே, இத்தகைய விளக்கப் படம் ஆய்லர் விளக்கப் படம் என அழைக்கப்படுகிறது. பிரிட்டானிய அளவையியல் அறிஞர் வென் (Venn) *[1834 — 1883]* முழுமைக் கணத்தை ஒரு செவ்வகப் பரப்பாலும் (rectangular region) மற்றக் கணங்களை அந்தச் செவ்வகப் பரப்பிற்குள்ளே வட்டப் பரப்புகளாலும் குறித்து ஆய்லர் விளக்கப் படத்தை விரிவு படுத்தினர். இப் புதிய முறை விளக்கப் படத்திற்கு வென் விளக்கப் படம் (Venn diagram) என்பது பெயர். சில வேளைகளில் வட்டப் பரப்புகளுக்குப் பதிலாக நீண்ட - வட்டப் பரப்புகள் (elliptical regions) அல்லது ஒழுங்கற்ற அடைத்த பரப்புகள் (irregular closed regions) பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

வென் விளக்கப் படத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே தருகிறோம்.



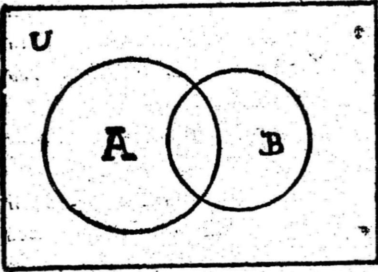
முழுமைக் கணமும்
ஒரு கணமும்

படம் 1.



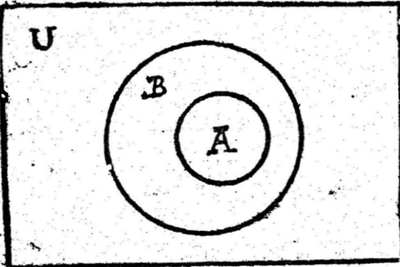
முழுமைக் கணமும்
இரு கணங்களும்
$A \cap B = \phi$

படம் 2.



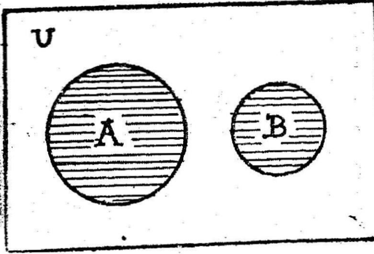
முழுமைக் கணமும்
இரு கணங்களும்
$A \cap B \neq \phi$

படம் 3.



முழுமைக் கணமும்
இரு கணங்களும்
$A \subset B$

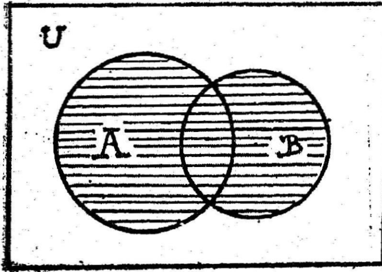
படம் 4.



$A \cap B = \phi$

$A \cup B$ [கோடிட்ட பகுதி]

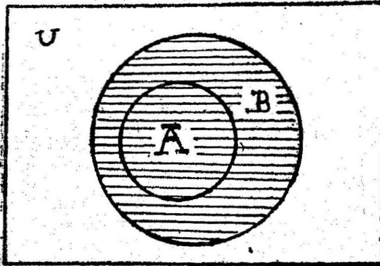
படம் 5.



$A \cap B \neq \phi$

$A \cup B$ [கோடிட்ட பகுதி]

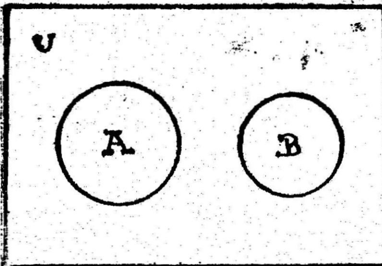
படம் 6.



$A \subset B$

$A \cup B$ [கோடிட்ட பகுதி]

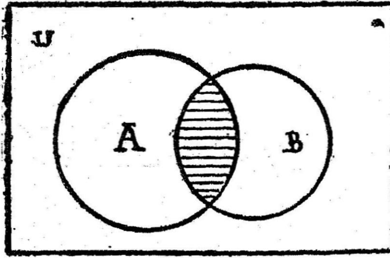
படம் 7.



$A \cap B = \phi$

$A \cap B$ [கோடிட்ட பகுதி]

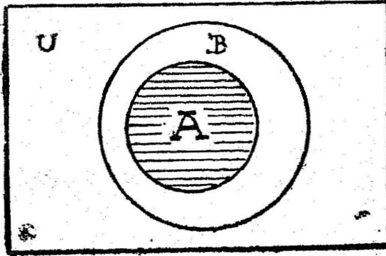
படம் 8.



$A \cap B \neq \phi$

$A \cap B$ [கோடிட்ட பகுதி]

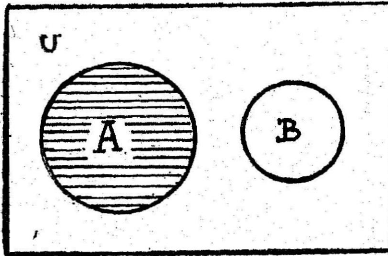
படம் 9.



$A \subset B$

$A \cap B$ [கோடிட்ட பகுதி]

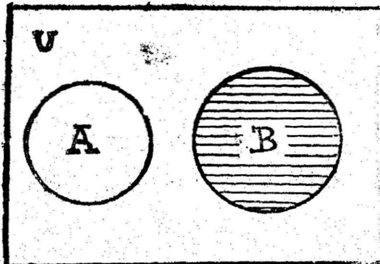
படம் 10.



$A \cap B = \phi$

$A - B$ [கோடிட்ட பகுதி]

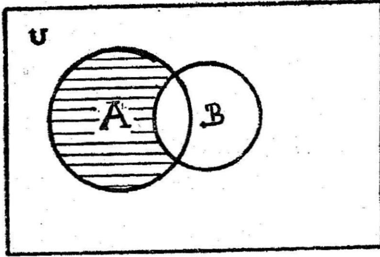
படம் 11.



$A \cap B = \phi$

$B - A$ [கோடிட்ட பகுதி]

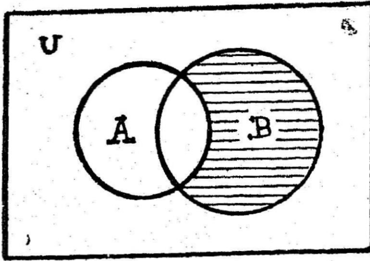
படம் 12.



$A \cap 1 \neq \phi$

$A - B$ [கோடிட்ட பகுதி]

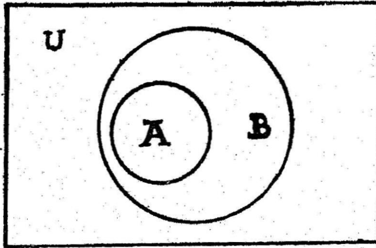
படம் 13.



$A \cap B \neq \phi$

$B - A$ [கோடிட்ட பகுதி]

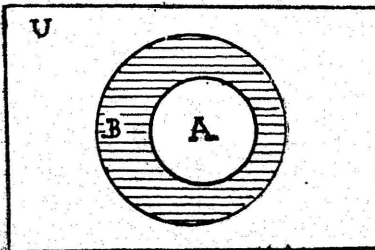
படம் 14.



$A \subset B$

$A - B$ [கோடிட்ட பகுதி]

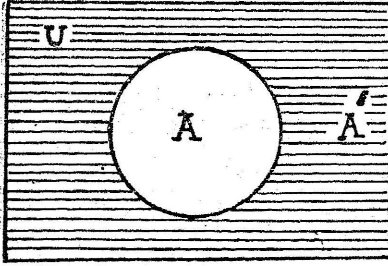
படம் 15.



$A \subset B$

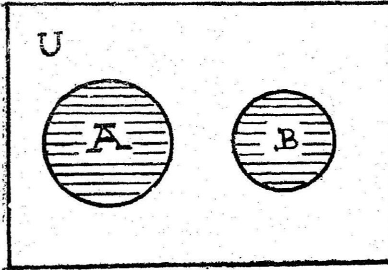
$B - A$ [கோடிட்ட பகுதி]

படம் 16.



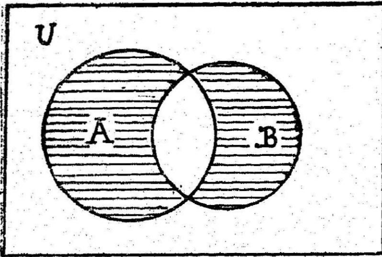
A' [கோடிட்ட பகுதி]

படம் 17.



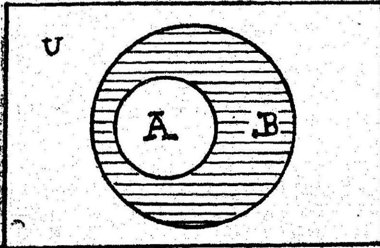
$A \cap B = \phi$
$A \triangle B$ [கோடிட்ட பகுதி]

படம் 18.



$A \cap B \neq \phi$
$A \triangle B$ [கோடிட்ட பகுதி]

படம் 19.



$A \subset B$
$A \triangle B$ [கோடிட்ட பகுதி]

படம் 20.

3–8. மாதிரிக் கணக்குகள்

3–8·1. மாதிரிக் கணக்கு

$A \subset B \wedge C \subset D$ எனில், $A \cup C \subset B \cup D$ என நிறுவுக.

$A \subset B \wedge C \subset D$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–5·2-ன் படி,

$x \in A \Longrightarrow x \in B \wedge x \in C \Longrightarrow x \in D$ ... (1)

இப்பொழுது,

$x \in A \cup C \Longrightarrow x \in A \vee x \in C$ [3–2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in B \vee x \in D$ [(1)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in B \cup D$ [3–2·2-ன் படி]

$\therefore A \cup C \subset B \cup D$ [2–5·2-ன் படி]

3–8·2. மாதிரிக் கணக்கு

$A \cap B \neq \phi \Longrightarrow A \neq \phi$ என நிறுவுக.

$A \cap B \neq \phi$ (எடுகோள்)

$\therefore \exists x \in A \cap B$

இப்பொழுது,

$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A$ [1-10·5(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow A \neq \phi$

$\therefore A \cap B \neq \phi \Longrightarrow A \neq \phi$.

3–8·3. மாதிரிக் கணக்கு

$A \cup B = \phi \Longleftrightarrow A = \phi \wedge B = \phi$ என நிறுவுக.

பாகம் 1 :

$A \cup B = \phi \Longrightarrow A = \phi \wedge B = \phi$ என நிறுவவேண்டும்.

$A \cup B = \phi$ (எடுகோள்)

முடியுமானல், $A \neq \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது $\exists x \in A$.

இப்பொழுது,

$x \in A \Longrightarrow x \in A \vee x \in B$ [1–10·6(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \cup B$ [3–2·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in \phi$ [எடுகோள் படி]

இது ஒரு முரண்பாடு

$\therefore$ $A \neq \phi$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore$ $A = \phi$.

இதே போன்று, $B = \phi$.

பாகம் 2 :

$A = \phi \wedge B = \phi \Longrightarrow A \cup B = \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A = \phi \wedge B = \phi$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $A \cup B = \phi \cup \phi = \phi$

3–8·4. மாதிரிக் கணக்கு

$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A - B = A$ என நிறுவுக

பாகம் 1 :

$A \cap B = \phi \Longrightarrow A - B = A$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \cap B = \phi$ (எடுகோள்)

$x \in A - B \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A$ [1-10·5(a)-ன் படி]

எனவே, 2–5·2-ன் படி,

$A - B \subset A$ ... (i)

$x \in A \Longrightarrow x \in A \wedge x \in A$ [1–10·11 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ [எடுகோள் மற்றும் 3–3·11-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A - B$ [3–4·2-ன் படி]

எனவே, 2–5·2-ன் படி,

$A \subset A - B$ ... (ii)

(i), (ii)-லிருந்து, $A - B = A$ [2–5·11-ன் படி]

பாகம் 2 :

$A - B = A \Longrightarrow A \cap B = \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A = (A - B)$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad x \in A \Longrightarrow x \in A - B$ [2–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin B$ [1–10·5 (b)-ன் படி]

$\therefore \quad A \cap B = \phi$ [3–3·11-ன் படி]

3–8·5. மாதிரிக் கணக்கு

A, B என்பன இரு கணங்கள். $A—B$, $B—A$, $A \cap B$ என்பவை இரட்டை இரட்டையாகப் பொது உறுப்பில் கணங்கள் (disjoint sets) என நிறுவுக.

[மதுரைப் பல்கலைக் கழகம்—செப்டம்பர் 1973]

$x \in A - B \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin B$ [1–10·5 (b)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin B \vee x \in A$ [1–10·6 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin B - A$ [3–4·3-ன் படி]

$\therefore \quad (A - B) \cap (B - A) = \phi$ [3–3·11-ன் படி]

$x \in A - B \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin A \cap B$

$\therefore \quad (A - B) \cap (A \cap B) = \phi$ [3–3·11-ன் படி]

$x \in B - A \Longrightarrow x \in B \wedge x \notin A$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin A \wedge x \in B$ [1–10·12 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin A \cap B$

$\therefore (B - A) \cap (A \cap B) = \phi$ [3–3·11-ன் படி]

3–8·6. மாதிரிக் கணக்கு

$A - B = B' - A'$ என நிறுவுக.

$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$ [3–4·1-ன் படி]

$= \{ x \mid x \notin A' \wedge x \notin B \}$ [3–5·3-ன் படி]

$= \{ x \mid x \notin A' \wedge x \in B' \}$ [3–5·2-ன் படி]

$= \{ x \mid x \in B' \wedge x \notin A' \}$ [1–10·12 (a)-ன் படி]

$= B' - A'$ [3–4·1-ன் படி]

3–8·7. மாதிரிக் கணக்கு

$A' \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = U$ என நிறுவுக.

பாகம் 1 :

$A' \subset B \Longrightarrow A \cup B = U$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A' \subset B$ (எடுகோள்)

2–6·1-ன் படி, $A \cup B \subset U$ ... (i)

$x \in U \Longrightarrow x \in A \vee x \in A'$

$\Longrightarrow x \in A \vee x \in B$ [எடுகோள் மற்றும் 2–5·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \cup B$ [3–2·2–ன் படி]

எனவே, 2–5·2–ன் படி,

$U \subset A \cup B$ ... (ii)

(i), (ii)-லிருந்து, $A \cup B = U$ [2–5·11–ன் படி]

பாகம் 2 :

$A \cup B = U \Longrightarrow A' \subset B$ என நிறுவ வேண்டும்.

$U = A \cup B$ (எடுகோள்)

$\therefore \; x \in U \Longrightarrow x \in A \cup B$ [2–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \vee x \in B$ [3–2·2–ன் படி]

$\therefore \; x \notin A \Longrightarrow x \in B$ ... (iii)

இப்பொழுது,

$x \in A' \Longrightarrow x \notin A$ [3–5·2–ன் படி]

$\Longrightarrow x \in B$ [(iii)–ன் படி]

$\therefore A' \subset B$ [2–5·2–ன் படி]

பயிற்சி 3 (அ)

1 $A \cup B$, $A \cap B$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(a) $A = \{3, 4, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$

(b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d\}$

(மீரட் பல்கலைக்கழகம்—1967)

(c) $A = \{3, 8, 5\}$ $B = \phi$

(d) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{f, g, h\}$

2. $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 4, 5\}$ எனில், $(A \cup B) \cup C$, $A \cup (B \cup C)$, $A \cap (B \cap C)$, $(A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $A = \{4, 5, 7, 10\}$, $B = \{1, 5, 9\}$, $C = \{4, 8\}$ எனில்,

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என நிறுவுக.

4. $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, g\}$.

$C = \{b, e, f, g\}$ எனில்,

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ என நிறுவுக.

5. $A - B$, $B - A$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(a) $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 10, 9\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{7, 5, 1, 3, 2\}$.

(c) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d\}$

(d) $A = \{a, c, d, f\}$, $B = \{b, e, h\}$

(e) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \phi$

6. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 9\}$, $C = \{2, 4, 8, 7\}$ எனில், $(A - B) - C$, $A - (B - C)$, $B - (A \cup C)$, $C \cap (A - B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$,
$D = \{4, 5, 6, 7\}$ எனில், $A \cup B$, $C \cap (A \cup B)$,
$D - [C \cap (A \cup B)]$, $C \cup D$, $A \cup B) \cap (C \cup D)$
ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. $A = \{1\}$, $B = \{1, \{1\}\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 2, \{1\}\}$,
$E = \{1, \{1, \{1\}\}\}$ எனில்,
$A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \cap C$, $\{A\} \cap B$,$) C \cup D) - B$,
$(A \cap D) - E$, $\{B\} \cap E$, $[\{A\} \cup D] \cap (E - C)$
ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. $A \triangle B$ ஐக் காண்க.

(a) $A = \{1, 3, 4, 7\}$ $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$

(b) $A = \{a, c, d, b\}$ $B = \{a, b, a, d\}$

(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$

(d) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \phi$

(e) $A = \{a, c, d, e, f\}$, $B = \{b, g, h\}$

10. $A = \{a, b, c, g, h\}$, $B = \{b, d, f, e\}$ எனில்,
$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ என நிறுவுக.

11. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3, 4, 7, 9\}$,
$B = \{2, 3, 4, 6, 9\}$ எனில், A', B', $A' \cup B$, $A \cap B'$,
$(A - B)'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

12. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A = \{3, 5, 4, 8\}$, $B = \{2, 7, 4, 9, 1, 3\}$ எனில்,

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என நிறுவுக.

13. கீழ்க் கண்டவற்றைக் காண்க.

(a) $\phi \cup \phi$

(b) $\phi \cap \phi$

(c) $\{\phi\} \cup \{\phi\}$

(d) $\{\phi\} \cap \{\phi\}$

(e) $\phi \cup \{\phi\}$

(f) $\phi \cap \{\phi\}$

(g) $\{\phi, \{\phi\}\} - \phi$

(h) $\{\phi, \{\phi\}\} - \{\phi\}$

(i) $\{\phi, \{\phi\}\} - \{\{\phi\}\}$

14. $A \cap B \neq \phi, B \cap C \neq \phi, A \cap C \neq \phi, (A \cap B) \cap C = \phi$ என இருக்குமாறு A, B, C, என்ற கணங்களுக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

15. $(A - B) - C \neq A - (B - C)$ என இருக்குமாறு A, B, C என்ற கணங்களுக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

பயிற்சி 3 (ஆ)

1. $A \subset B$, C என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ என நிறுவுக.

2. $A \subset C$, $B \subset C$ எனில், $(A \cup B) \subset C$ என நிறுவுக.

3. $A \subset B$, C என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ என நிறுவுக.

4. $C \subset A \wedge C \subset B \iff C \subset (A \cap B)$ என நிறுவுக.

5. $A \subset B, = C \subset D$ எனில், $(A \cap C) \subset (B \cap D)$ என நிறுவுக.

6. $A \cap B$, ϕ என்பதிலிருந்து $A = \phi$ அல்லது $B = \phi$ எனத் தீர்மானிக்க முடியாது என நிறுவுக.

7. A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $A - B \subset A$

(b) $A - B \subset A \cup B$

c) $A \cap B \subset A \cup B$

d) $(A - B) \cap B \cdot \phi$

(e $(A - B - B = A - B$

8. A, B, C என்பன மூன்று கணங்கள் எனில், கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $A \supset B \Longrightarrow (A - C) \supset B - C$

(b) $[(A \cap B) - C] \subset [(A \cup B) - C]$

(c) $[A - (B \cup C)] \subset [A - B \cap C)]$

9. A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(a) $B - A \subset A'$

(b) $A - B' = A \cap B$

(c) $A \subset B \Longrightarrow B' \subset A'$

(d) $A \subset B \Longrightarrow A' \cup B = U$

(e) $A \cap B = \phi \Longleftrightarrow B \subset A'$

விடைகள் [பயிற்சி 3 (அ)]

1. (a) $A \cup B = \{3, 4, 7, 9, 2, 6\}$
$A \cap B = \{3, 4, 9\}$

(b) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
$A \cap B = \{a, c\}$

(c) $A \cup B = \{3, 8, 5\}$
$A \cap B = \phi$

(d) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
$A \cap B = \phi$

2. $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 5, 6, 3, 4\}$

$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 5, 6, 3, 4\}$

$A \cap (B \cap C) = \{5\}$

$(A \cap B) \cap C = \{5\}$

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 5\}$

5. (a) $A - B = \{2, 3\}$
$B - A = \{5, 10, 9\}$

(b) $A - B = \phi$
$B - A = \phi$

(c) $A - B = \{b, c, e\}$
$B - A = \phi$

(d) $A - B = \{a, c, d, f\}$
$B - A = \{b, e, h\}$

(e) $A - B = \{1, 2, 3\}$
$B - A = \phi$

6. $(A - B) - C = \{1, 5\}$

$A - (B - C) = \{1, 5, 7\}$

$B - (A \cup C) = \{6\}$

$C \cap (A - B) = \{7\}$

7. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

$C \cap (A \cup B) = \{2, 3, 5\}$

$D - [C \cap (A \cup B)] = \{4, 6, 7\}$

$C \cup D = \{2, 3, 5, 7, 4, 6\}$

$(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{2, 3, 5\}$

8. $A \cup B = \{1, \{1\}\}$

$A \cap B = \{1\}$

$(A \cup B) \cap C = \{1\}$

$\{A\} \cap B = \{\{1\}\}$

$(C \cup D) - B = \{2\}$

$(A \cap D) - E = \{\phi\}$

$\{B\} \cap E = \{\{1, \{1\}\}\}$

$[\{A\} \cup D] \cap (E - C) = \phi$

9. (a) $A \triangle B = \{4, 7, 2, 5, 8\}$

(b) $A \triangle B = \phi$

(c) $A \triangle B = \{1, 4, 6\}$

(d) $A \triangle B = \{a, b, c, d\}$

(e) $A \triangle B = \{a, c, d, e, f, b, g, h,\}$

11. $A' = \{1, 2, 5, 6, 8\}$

$B' = \{1, 5, 7, 8\}$

$A' \cup B = \{1, 2, 5, 6, 8, 3, 4, 9\}$

$A \cap B' = \{7\}$

$(A - B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

13. (a) ϕ (b) ϕ (c) $\{\phi\}$ (d) $\{\phi\}$ (e) $\{\phi\}$
(f) ϕ (g) $\{\phi, \{\phi\}\}$ (h) $\{\{\phi\}\}$ (i) $\{\phi\}$

14. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$

15. $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$

4. கண இயற்கணிதம்

(Set Algebra)

4·1. முன்னுரை

மெய் எண்களின் இயற்கணிதத்தில் $+, \cdot, \leqslant$ ஆகியவற்றின் பண்புகளையும், அவைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளையும் கற்கிறோம். இதேபோன்று, கணங்களைப் பொறுத்த மட்டில் $\cup$, $\cap$, $'$, $\subset$ ஆகியவற்றின் அடிப்படைப் பண்புகள் யாவை; அவைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகள் யாவை- என்ற வினு எழும், கணக் கூட்டு, இடைவெட்டு நிரப்புதல் என்ற செயல்கள், கண அடங்கல் என்ற தொடர்பு ஆகியவற்றால் கணங்கள் சில அடிப்படை விதிகளுக்கு உட்படுகின்றன. இந்த விதிகளிலிருந்து கண இயற்கணிதத்தை அமைப்போம்.

4·2. கண இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை விதிகள்

மெய்யெண் கூட்டலும் பெருக்கலும் பரிமாறுபவை (commutative) என அறிவோம். அதாவது a, b என்பன எவையேனும் இரு மெய் எண்கள் எனில், அப்பொழுது $a+b=b+a$; $ab=ba$. ஆனால், அணிப் பெருக்கலுக்குப் (multiplication of matrices) பரிமாற்றுப் பண்பு கிடையாது. கணங்களைப் பொறுத்த வரையில் கணக் கூட்டு, இடைவெட்டு என்ற இரு செயல்களுக்கும் மாற்றுப் பண்பு உண்டா என்ற கேள்விக்கு அடுத்த தேற்றத்தில் விடை காணலாம்.

4–2·1 தேற்றம் [பரிமாற்று விதிகள்—Commutative Laws]

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \cup B = B \cup A$ (b) $A \cap B = B \cap A$

நிறுவல் :

(a) $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$ [3–2·2-ன் படி]

$\iff x \in B \vee x \in A$ [1-10·12 (b)-ன் படி]

$\iff x \in B \cup A$ [3-2·2-ன் படி]

$\therefore A \cup B = B \cup A$ [2–3·2-ன் படி]

(b) $x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ [3–3·2 -ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in B \wedge x \in A$ [1–10·12 (a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in B \cap A$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore A \cap B = B \cap A$ [2–3·2-ன் படி]

4–2·2. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$

(b) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$

நிறுவல் :

(a) $x \in A \Longrightarrow x \in A \vee x \in B$ [1–10·6 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \cup B$ [3–2·2-ன் படி]

$\therefore A \subset A \cup B$ [2–5·2-ன் படி]

இதேபோல், $B \subset A \cup B$ என நிறுவலாம்.

(b) $x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A$ [1–10·5(a)-ன் படி]

$\therefore A \cap B \subset A$ [2–5·2-ன் படி]

இதேபோல், $A \cap B \subset B$ என நிறுவலாம்.

4–2·3. தேற்றம் [இசைவு விதிகள்—Consistency Laws]

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

(b) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

நிறுவல்:

(a) பாகம் 1 :

$A \subset B \Longrightarrow A \cup B = B$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \subset B$ (எடுகோள்)

$x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \vee x \in B$ [3–2·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in B \vee x \in B$ [எடுகோள் மற்றும் 2–5·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in B$ [1–10·11(b)-ன் படி]

$\therefore \; A \cup B \subset B$ [2–5·2-ன் படி]

ஆனால், $B \subset A \cup B$ [4–2·2(a)-ன் படி]

$\therefore \; A \cup B \subset B \wedge B \subset A \cup B$

$\therefore \; A \cup B = B$ [2–5·11-ன் படி]

பாகம் 2:

$A \cup B = B \Longrightarrow A \subset B$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \cup B = B$ (எடுகோள்)

$\therefore \; A \cup B \subset B$ [2–5·11-ன் படி]

ஆனால், $A \subset A \cup B$ [4–2·2 (a)-ன் படி]

$\therefore \; A \subset A \cup B \wedge A \cup B \subset B$

$\therefore A \subset B$ [2–5·10-ன் படி]

(b) பாகம் 1 :

$A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \subset B$ (எடுகோள்)

$x \in A \Longrightarrow x \in A \wedge x \in A$ [1–10·11(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B$ எடுகோள் மற்றும் 2–5·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \cap B$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore \; A \subset A \cap B$ [2–5·2-ன் படி]

ஆனால், $A \cap B \subset A$ [4–2·2(b)-ன் படி]

$\therefore \; A \subset A \cap B \wedge A \cap B \subset A$

$\therefore \; A \cap B = A$ [2–5·11-ன் படி]

பாகம் 2:

$A \cap B = A \Longrightarrow A \subset B$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A = A \cap B$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad A \subset A \cap B$ [2–5·11-ன் படி]

ஆனால் $A \cap B \subset B$ [4–2·2(b)-ன் படி]

$\therefore \quad A \subset A \cap B \wedge A \cap B \subset B$

$\therefore \quad A \subset B$ [2–5·10-ன் படி]

4–2·4. இணைத்தேற்றம் [தன்னுற்றல் விதிகள்—Idempotent Laws]

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \cup A = A$ (b) $A \cap A = A$

நிறுவல்:

(a) $A \subset A$ [2–5·3 மற்றும் 2–5·9-ன் படி]

எனவே, 4–2·3 (a)-ன் படி, $A \cup A = A$

(b) $A \subset A$ [2–5·3 மற்றும் 2–5·9-ன் படி]

எனவே, 4–2·3 (b)-ன் படி $A \cap A = A$

4–2·5. இணைத் தேற்றம்

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது

(a) $\phi \cup A = A = A \cup \phi$

(b) $\phi \cap A = \phi = A \cap \phi$

நிறுவல்:

(a) $\phi \subset A$ [2–5·9-ன் படி]

$\therefore \quad \phi \cup A = A$ [4–2·3 (a)-ன் படி]

$\therefore \quad \phi \cup A = A = A \cup \phi$ [4–2·1 (a)-ன் படி]

(b) $\phi \subset A$ [2–5·9-ன் படி]

$\therefore \quad \phi \cap A = \phi$ 4–2·3 (b)-ன் படி]

$\therefore \quad \phi \cap A = \phi = A \cap \phi$ [4–2·1 (b)-ன் படி]

4–2·5(a)-லிருந்து, கணக்கூட்டிற்கு வெற்றுக்கணம் முற்றொருமை உறுப்பு (identity element) என அறிகிறோம்.

4–2·6. இணைத் தேற்றம்

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \cup U = U = U \cup A$

(b) $A \cup U = A = U \cap A$

நிறுவல்:

(a) $A \subset U$ [2–6·1-ன் படி]

$\therefore\ A \cup U = U$ [4–2·3 (a)-ன் படி]

$\therefore\ A \cup U = U = U \cup A$ [4–2·1 (a)-ன் படி]

(b) $A \subset U$ [2–6·1-ன் படி]

$\therefore\ A \cap U = A$ [4–2·3 (b)-ன் படி]

$\therefore\ A \cap U = A = U \cap A$ [4–2·1 (b)-ன் படி]

4–2·6 (b)-லிருந்து கண இடைவெட்டிற்கு முழுமைக் கணம் முற்றொருமை உறுப்பு என அறிகிறோம்.

4–2·7. தேற்றம் [தன்மயமாக்கும் விதிகள்—Absorption Laws]

A, B என்பவை எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \cup (A \cap B) = A$

(b) $A \cap (A \cup B) = A$

நிறுவல்:

(a) $A \cap B \subset A$ [4–2·2 (b)-ன் படி]

$\therefore\ (A \cap B) \cup A = A$ [4–2·3 (a)-ன் படி]

$\therefore\ A \cup (A \cap B) = A$ [4–2·1 (a)-ன் படி]

(b) $A \subset A \cup B$ [4–2·2 (a)-ன் படி]

$\therefore\ A \cap (A \cup B) = A$ [4–2·3 (b)-ன் படி]

மெய்யெண் கூட்டல், பெருக்கல் என்ற இரு செயல்களுக்கும் சேர்ப்புப் பண்பு (associative property) உண்டு. அதாவது, a, b, c என்பன எவையேனும் மூன்று மெய்யெண்கள் எனில், அப்பொழுது

$a + (b + c) = (a + b) + c\ ;\ a(bc) = (ab)c.$

இதேபோல், அணிக் கூட்டலும் (matrix addition) அணிப் பெருக்கலும் (matrix multiplication) சேர்ப்புப் பண்பு உடையவை. திசையிக் கூட்டலுக்கும் (vector addition) சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு. ஆனால் திசையிக் குறுக்குப் பெருக்கலுக்குச் (cross multiplication of vectors) சேர்ப்புப் பண்பு கிடையாது. எனவே, கணக் கூட்டு, இடைவெட்டு என்ற செயல்களுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டா என்ற வினா எழுவது இயல்பே. விடையை அடுத்த தேற்றத்தில் காண்போம்.

4–2·8. தேற்றம் [சேர்ப்பு விதிகள்—Associative Laws]

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

நிறுவல்:

(a) $A \cup (B \cup C) = \{x \mid x \in A \vee x \in B \cup C\}$ [3–2·1-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\}$ [3–2·2-ன் படி]

$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}$ [1–10·18 (b)-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \cup B \vee x \in C\}$ [3–2·2-ன் படி]

$= (A \cup B) \cup C$ [3–2·1-ன் படி]

(b) $A \cap x B \cap C) = \{(x \in A \wedge x \in B \cap C\}$ [3–3·1-ன்படி]

$=\{x \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\}$ [3–3·2-ன் படி]

$= \{(x \mid x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\}$ [1–10 18 (a)-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \cap B \wedge x \in C\}$ [3–3·2-ன் படி]

$= (A \cap B) \cap C$ [3–3·1-ன் படி]

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ என நிறுவினோம். ஆகவே, $A \cup (B \cup C)$, $(A \cup B) \cup C$ என்ற இரு கோவைகளிலும் (expressions) உள்ள அடைப்புகளை நீக்கிவிட்டு, அவைகளை

$A \cup B \cup C$ என எழுதலாம். இது கண இடைவெட்டிற்கும் பொருந்தும். எனவே, 4-2·1-ன் படி

4–2·9. $A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A$
$= C \cup B \cup A = C \cup A \cup B$

4–2·10. $A \cap B \cap C = A \cap C \cap B = B \cap A \cap C$
$= B \cap C \cap A = C \cap B \cap A = C \cap A \cap B$

இனி, A, B, C என்பன மூன்று கணங்கள் எனில்,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

என்ற இரண்டும் பொது உண்மைகளா என்ற வினா எழும். ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இவைகள் பொது உண்மைகள் அல்ல என நிறுவுவோம்.

$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3\}, C = \{2, 4, 7, 5\}$ எனில்,

$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5\} \cup \{2\} = \{1, 3, 5, 2\}$,

$(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 5, 2\} \cap \{2, 4, 7, 5\} = \{5, 2\}$,

$A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 4, 7, 5\} = \{3, 5\}$,

$(A \cap B) \cup C = \{3\} \cup \{2, 4, 7, 5\} = \{3, 2, 4, 7, 5\}$.

எனவே, $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$
$A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$

அதாவது, விருப்பப்பட்ட இடங்களில் அடைப்புகளை இட முடியாது. எனவே, $A \cup B \cap C$, $A \cap B \cup C$ என்ற இரு கோவைகளும் பொருளற்றவை; கணங்களைக் குறிக்கமாட்டா.

இனி, $A \cup (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$ என்ற இரண்டையும் வேறு எவ்வாறு எழுதலாம் என்ற வினா எழும். இதற்கு விடை அடுத்த தேற்றத்தில் கிடைக்கும்.

4–2·11. தேற்றம் [பங்கீட்டு விதிகள் — Distributive Laws]

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

நிறுவல் :

(a) $A \cup ((B \cap C) = \{x \mid x \in \quad \vee x \in B \cap C$ [3–2·1-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$
[3–3·2-ன் படி]

$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$
[1–10·19(b) -ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C\}$
[3–2·2-ன் படி]

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [3–3·1-ன் படி]

(b) $A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \cup C)\}$
[3–3·1-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$
[3–2·2-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$
[1–10·19 (a)-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \cap B \vee x \in A \cap C\}$
[3–3·2-ன் படி]

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [3–2·1-ன் படி]

4–2·11-லிருந்து, கணக் கூட்டு, கண இடைவெட்டு என்ற இரு செயல்களுள் ஒன்று மற்றதைப் பங்கீடு செய்கிறது என அறிகிறோம். மெய்யெண் இயற்கணிதத்தில் பெருக்கல் கூட்டலைப் பங்கீடு செய்கிறது. அதாவது, a, b, c என்பன எவையேனும் மூன்று மெய் எண்கள் எனில், அப்பொழுது $a.(b + c) = a.b + a.c$. ஆனால் கூட்டல் பெருக்கலைப் பங்கீடு செய்யாது. இதை நிறுவ ஓர் எடுத்துக்காட்டு போதும். சான்றாக,
$2 + (3 \cdot 4) \neq (2 + 3) \cdot (2 + 4)$

இதுவரை, $\cup$, $\cap$, $\subset$ ஆகியவை சம்பந்தப்பட்ட விதிகளைக் கண்டோம். இனி, கண வேறுபாட்டின் பண்புகளைப் பார்ப்போம்.

கணக் கூட்டிற்கும் இடைவெட்டிற்கும் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு. ஆனால் கண வேறுபாட்டிற்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு கிடையாது. இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் நிறுவலாம். சான்றாக,

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ எனில், அப்பொழுது

$A - B = \{1\}$, $B - A = \{3\}$. எனவே,

$$A - B \neq B - A.$$

ஒப்பிடத்தக்க கணங்களின் வேறுபாட்டினுடைய சிறப்பான பண்பை அடுத்த தேற்றத்தில் காணலாம்.

4–2·12. தேற்றம்

$A \subset B \Longleftrightarrow A - B = \phi$

நிறுவல் :

பாகம் 1 :

$A \subset B \Longrightarrow A - B = \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \subset B$ (எடுகோள்)

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ [3–4·1-ன் படி]

$= \{x \mid x \in B \wedge x \notin B\}$ [எடுகோள், மற்றும் 2–5·2-ன் படி]

$= \phi$

பாகம் 2 :

$A - B = \phi \Longrightarrow A \subset B$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A - B = \phi$ (எடுகோள்)

முடியுமானால், $A \not\subset B$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, $\exists\, x \in A \ni x \notin B$ [2–5·8-ன் படி]

$\therefore\ x \in A - B$ [3–4·2-ன் படி]

$\therefore\ x \in \phi$ [எடுகோள் படி]

இது ஒரு முரண்பாடு.

எனவே, $A \not\subset B$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore\ A \subset B$

2–41·3. கிளைத் தேற்றம்

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது

(a) $A - U = \phi$

(b) $A - A = \phi$

(c) $\phi - A = \phi$

நிறுவல் :

(a) $A \subset U$ [2–6·1-ன் படி]

$\therefore \quad A - U = \phi$ [4–2·12-ன் படி]

(b) $A \subset A$ [2–5·3, மற்றும் 2–5·9-ன் படி]

$\therefore \quad A - A = \phi$ [4–2·12-ன் படி]

(c) $\phi \subset A$ [2–5·9–ன் படி]

$\therefore \quad \phi - A = \phi$ [4–2·12–ன் படி]

4–2·14. தேற்றம்

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது

$A - \phi = A$

நிறுவல் :

$x \in A - \phi \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin \phi$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in A.$

$\therefore \quad A - \phi = A$ [2–3·2-ன் படி]

அடுத்து, ஒருறுப்புச் செயலான கண நிரப்புதலின் பண்பு களைப் பார்ப்போம். A என்பது ஏதேனும் ஓர் அணி (matrix), T இடமாற்றலைக் (Transposition) குறிக்கிறது எனில், அப்பொழுது $(A^T)^T = A$ என அறிவோம். அணி இடமாற்ற லுக்குரிய இப் பண்பு கண நிரப்புதலுக்கும் உண்டு என்பதை அடுத்த தேற்றம் காட்டும்.

4–2·15. தேற்றம் [இன்வலூஷன் விதி—Involution Law]

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது

$(A')' = A$

நிறுவல் :

$x \in (A')' \iff x \notin A'$ [3–5·2-ன் படி]

$\iff x \in A$ [3–5·3-ன் படி]

$\therefore \ (A')' = A$ [2–3·2-ன் படி]

கணங்களில், முழுமைக் கணமும் வெற்றுக் கணமும் சிறப்பானவை. அவைகளின் நிரப்பிகளைக் (complements) கீழ்வரும் தேற்றத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்வோம்.

4–2·16. தேற்றம்

(a) $U' = \phi$

(b) $\phi' = U$

நிறுவல் :

(a) $U' = U - U$ [3–5·1-ன் படி]

$= \phi$ [4–2·13 (b)-ன் படி]

(b) $\phi' = U - \phi$ [3–5·1-ன் படி]

$= U$ [4–2·14-ன் படி]

ஒரு கணத்திற்கும் அதன் நிரப்பிக்கும் உள்ள தொடர்பை அடுத்த தேற்றத்தில் காண்போம்.

4–2·17. தேற்றம்

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \cup A' = U = A' \cup A$

(b) $A \cap A' = \phi = A' \cap A$

நிறுவல்:

(a) 2–6·1-ன் படி, $A \subset U$, $A' \subset U$

$\therefore x \in A \Longrightarrow x \in U, \ x \in A' \Longrightarrow x \in U$ ... (1)

$A \cup A' = \{ x \mid x \in A \vee x \in A' \}$ [3–2·1-ன் படி]

$= \{ x \mid x \in U \vee x \in U \}$ [(1)-லிருந்து]

$= \{ x \mid x \in U \}$ [1–10 11(b)-ன் படி]

$= U$

ஆனால் $A \cup A' = A' \cup A$ [4–2·1(a)-ன் படி]

$\therefore \; A \cup A' = U = A' \cup A$

(b) $A \cap A' = \{x \mid x \in A \wedge x \in A'\}$ [3–3·1-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}$ [3–5·2-ன் படி]

$= \phi$

ஆனால் $A \cap A' = A' \cap A$

$\therefore \; A \cap A' = \phi = A' \cap A$

இரு கணங்களின் நிரப்பிகளின் மூலம் அவற்றின் கூட்டு, இடைவெட்டு ஆகியவற்றின் நிரப்பிகளைக் காண்பதற்கு அடுத்து வரும் டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's laws) துணை செய்கின்றன. டி மார்கன் என்ற கணித அறிஞர் தென் பாண்டி நாட்டின் தலைநகரான மதுரையில் பிறந்தவர் என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

4–2·18. தேற்றம் [டி மார்கன் விதிகள்—De Morgan's Laws]

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

நிறுவல் :

(a) $(A \cup B)' = \{x \mid x \notin A \cup B\}$ [3–5·1-ன் படி]

$= \{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\}$ [3–2·3-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A' \wedge x \in B'\}$ [3–5·2-ன் படி]

$= A' \cap B'$ [3–3·1-ன் படி]

(b) $(A \cap B)' = \{x \mid x \notin A \cap B\}$ [3–5·1-ன் படி]

$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$ [3–2·3-ன் படி]

$= \{x \mid x \in A' \vee x \in B'\}$ [3–5·2-ன் படி]

$= A' \cup B'$ [3–3·1-ன் படி]

நாம் இதுவரை நிறுவிய அடிப்படை விதிகளை நினைவிற் கொள்வதற்கும், ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்கும் ஏற்றவாறு அவை களைத் தொகுத்துக் கீழே தருகிறோம்.

4·2·19. கண இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை விதிகளின் தொகுப்பு

[$\subset$]

1. $A \subset A$

2. $A \subset B \wedge B \subset A \Longleftrightarrow A = B$

3. $A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

[$\cup$]		[$\cap$]
4(a) $A \cup B = B \cup A$	பரிமாற்று விதிகள்	4(b) $A \cap B = B \cap A$
5(a) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$	இசைவு விதிகள்	5(b) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
6(a) $A \cup A = A$	தன்னுற்றல் விதிகள்	6(b) $A \cap A = A$
7(a) $\phi \cup A = A = A \cup \phi$	ϕ-ன் பண்புகள்	7(b) $\phi \cap A = \phi = A \cap \phi$
8(a) $A \cup U = U = U \cup A$	U-ன் பண்புகள்	8(b) $A \cap U = A = U \cap A$
9(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	சேர்ப்பு விதிகள்	9(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C$
10(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	பங்கீட்டு விதிகள்	10(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
11(a) $A \cup (A \cap B) = A$	தன்மயமாக்கும் விதிகள்	11(b) $A \cap (A \cup B) = A$
12. $\phi \subset A \subset U$	பொது எல்லைகள்	
13. $(A')' = A$	இன்வலூஷன்	
14(a) $\phi' = U$	நிரப்பு விதிகள்	14(b) $U' = \phi$
15(a) $A \cup A' = U$	நிரப்பு விதிகள்	15(b) $A \cap A' = \phi$
16(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$	டி மார்கன் விதிகள்	16(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$\subset$, $\cup$, $\cap$, $'$ ஆகியவற்றின் வரையறைகளைக் குறிப்பிடாமல், ஆனால் மேலே தொகுக்கப்பட்டுள்ள விதிகளை மட்டும் பயன்படுத்திக் கணங்களின் பண்புகளை நிறுவலாம். இதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

4–2·20. எடுத்துக்காட்டு

$A \cap C = \phi$ எனில், அப்பொழுது $A \cap (B \cup C) = A \cap B$

நிறுவல் :

$A \cap C = \phi$ (எடுகோள்)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [4–2·11 (b)-ன் படி]

$= (A \cap B) \cup \phi$ [எடுகோளின் படி]

$= A \cap B$ [4–2·5(a)-ன் படி]

அடுத்து, கண வேறுபாடு, சமச்சீர் வேறுபாடு சம்பந்தப்பட்ட தேற்றங்கள் சிலவற்றை நிறுவுவோம்.

4–2·21. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A - B = A - (A \cap B)$

(b) $A - B = (A \cup B) - B$

நிறுவல் :

(a) $A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)'$ [3–5·6-ன் படி]

$= A \cap (A' \cup B')$ [4–2·18(b)-ன் படி]

$= (A \cap A') \cup (A \cap B')$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= \phi \cup (A \cap B')$ [4–2·17(b)-ன் படி]

$= A \cap B'$ [4–2·5(a)-ன் படி]

$= A - B$ [3–5·6-ன் படி]

(b) $(A \cup B) - B = (A \cup B) \cap B'$ [3–5·6-ன் படி]

$= B' \cap (A \cup B)$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= (B' \cap A) \cup (B' \cap B)$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= (A \cap B') \cup (B \cap B')$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= (A \cap B') \cup \phi$ [4–2·17(b)-ன் படி]

$= A \cap B'$ [4–2·5(a)-ன் படி]

$= A - B$ [3–5·6-ன் படி]

4–2·22. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(b) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

நிறுவல் :

(a) $(A - B) - C = (A \cap B') \cap C'$ [3–5·6-ன் படி]

$= A \cap (B' \cap C')$ [4–2·8(b)-ன் படி]

$= A \cap (B \cup C)'$ [4–2 18(a)-ன் படி]

$= A - (B \cup C)$ [3–5·6-ன் படி]

(b) $A - (B - C) = A \cap (B \cap C')'$ [3–5·6-ன் படி]

$= A \cap [B' \cup (C')']$ [4–2·18(b)-ன் படி]

$= A \cap (B' \cup C)$ [4–2·15-ன் படி]

$= (A \cap B') \cup (A \cap C)$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= (A - B) \cup (A \cap C)$ [3–5·6-ன் படி]

4–2·23. டி மார்கன் தேற்றம் (De Morgan's Theorem)

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

நிறுவல் :

(a) $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)'$ [3–5·6-ன் படி]

$= A \cap (B' \cap C')$ [4–2·18(a)-ன் படி]

$= (A \cap A) \cap (B' \cap C')$ [4–2·4(b)-ன் படி]

$= A \cap [A \cap (B' \cap C')]$
[4–2·8 (b)-ன் படி]

$= A \cap [(A \cap B') \cap C']$
[4–2·8(b)-ன் படி]

$= A \cap [(B' \cap A) \cap C']$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= A \cap [B' \cap (A \cap C')]$ [4–2·8(b)-ன் படி]

$= (A \cap B') \cap (A \cap C')$ [4–2·8(b)-ன் படி]

$= (A - B) \cap (A - C)$ [3–5·6-ன் படி]

(b) $A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)'$ [3–5·6-ன் படி]

$= A \cap (B' \cup C')$ [4-2·18(b)-ன் படி]

$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$ [4–2·11 (b)-ன் படி]

$= (A - B) \cup (A - C)$ [3–5·6-ன் படி]

4–2·24. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$A - (B \cup C) = (A \cup B) - (B \cup C)$$

நிறுவல் :

$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)'$ [3–5·6-ன் படி]

$= (A \cup B) \cap (B' \cap C')$ [4–2·18(a)-ன் படி]

$= [(A \cup B) \cap B'] \cap C'$ [4–2·8 (b)-ன் படி]

$= [B' \cap (A \cup B)] \cap C'$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= [(B' \cap A) \cup (B' \cap B)] \cap C'$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= [(B' \cap A) \cup \phi] \cap C'$ [4–2·17(b)-ன் படி]

$= (B' \cap A) \cap C'$ [4–2·5(a)-ன் படி]

$= (A \cap B') \cap C'$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= A \cap (B' \cap C')$ [4–2·8(b)-ன் படி]

$= A \cap (B \cup C)'$ [4–2·18(a)-ன் படி]

$= A - (B \cup C)$ [3–5·6-ன் படி]

அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து, கண இடைவெட்டு கண வேறுபாட்டைப் பங்கீடு செய்கிறது எனத் தெரிந்துகொள்வோம்.

4–2·25. தேற்றம் [பங்கீட்டு விதி — Distributive Law]

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

நிறுவல் :

$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$ [3–5·6-ன் படி]

$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$ [4–2·18 (b)-ன் படி]

$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$ [4–2·11 (b)-ன் படி]

$= [(A \cap A') \cap B] \cup [(A \cap B) \cap C']$ [4–2·10-ன் படி]

$= (\phi \cap B) \cup [(A \cap B) \cap C']$ [4–2·17(b)-ன் படி]

$= \phi \cup [(A \cap B) \cap C']$ [4–2·5(b)-ன் படி]

$= (A \cap B) \cap C'$ [4–2·5(a)-ன் படி]

$= A \cap (B \cap C')$ [4–2·8(b)-ன் படி]

$= A \cap (B - C)$ [3–5·6-ன் படி]

4–2·26. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$A \triangle B = B \triangle A$$

நிறுவல் :

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ [3–6·1-ன் படி]

$= (B - A) \cup (A - B)$ [4–2·1 (a)-ன் படி]

$= B \triangle A$ [3–6·1-ன் படி]

4–2·26-லிருந்து சமச்சீர் வேறுபாட்டிற்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு என அறிகிறோம்.

4–2·27. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

நிறுவல் :

$(A \cup B) - (A \cap B) = [(A \cup B) - A] \cup [(A \cup B) - B]$ *[4–2·23(b)-ன் படி]*

$= (B-A) \cup (A-B)$ *[4–2·21(b)-ன் படி]*

$= (A-B) \cup (B-A)$ *[4–2·1(a)-ன் படி]*

$= A \triangle B$ *[3–6·1-ன் படி]*

4–2·28. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

நிறுவல் :

$A \cap (B \triangle C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)]$ *[3–6·1-ன் படி]*

$= [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)]$ *[4–2·11(b)-ன் படி]*

$= [(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)]$ *[4–2·25-ன் படி]*

$= (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ *[3–6·1-ன் படி]*

4–2·28-லிருந்து கண இடைவெட்டு, சமச்சீர் வேறுபாட்டைப் பங்கீடு செய்கிறது என அறிகிறோம். அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து சமச்சீர் வேறுபாட்டிற்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு எனத் தெரிந்து கொள்வோம்.

4–2·29. தேற்றம் [சேர்ப்பு விதி — Associative Law]

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில். அப்பொழுது

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

நிறுவல் :

$A \triangle (B \triangle C) = [A - (B \triangle C)] \cup [(B \triangle C) - A]$ ... (1) *[3–6·1-ன் படி]*

$$A - (B \triangle C) = A - [(B \cup C) - (B \cap C)]$$
[4–2·27-ன் படி]

$$= [A - (B \cup C)] \cup [A \cap (B \cap C)]$$
[4–2·22(b)-ன் படி]

$$= [A - (B \cup C)] \cup [A \cap B \cap C] \quad \ldots (2)$$

$$(B \triangle C) - A = [(B \cup C) - (B \cap C)] - A$$
[4–2·27-ன் படி]

$$= (B \cup C) - [(B \cap C) \cup A]$$
[4–2·22 (a)-ன் படி]

$$= (B \cup C) - [A \cup (B \cap C)]$$
[4–2·1(a)-ன் படி]

$$= (B \cup C) - [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$$
[4–2·11(a)-ன் படி]

$$= [(B \cup C) - (A \cup B)] \cup [(B \cup A) - (A \cup C)]$$
[4–2·23 (b)-ன் படி]

$$= [(C \cup B) - (B \cup A)] \cup [(B \cup C) - (C \cup A)]$$
[4–2·1(a)-ன் படி]

$$= [C - (B \cup A)] \cup [B - (C \cup A)] \quad \ldots (3)$$
[4–2·24-ன் படி]

(1), (2), (3)-லிருந்து,

$$A \triangle (B \triangle C) = [A - (B \cup C)] \cup [A \cap B \cap C] \cup [C - (B \cup A)] \cup [B - (C \cup A)] \ldots (4)$$

A, C-க்களை இடம் மாற்ற,

$$C \triangle (B \triangle A)$$

$$= [C - (B \cup A)] \cup [C \cap B \cap A] \cup [A - (B \cup C)] \cup [B - (A \cup C)]$$

$$= [C - (B \cup A)] \cup [A \cap B \cap C] \cup [A - (B \cup C)] \cup [B - (A \cup C)]$$
[4-2·10-ன் படி]

$$= [A - (B \cup C)] \cup [A \cap B \cap C] \cup [C - (B \cup A)] \cup [B - (A \cup C)]$$
[4–2·9-ன் படி]

$$= [A - (B \cup C)] \cup [A \cap B \cap C] \cup [C - (B \cup A)] \cup [B - (C \cup A)] \quad \ldots (5)$$
[4–2·1(a)-ன் படி]

(4), (5)-லிருந்து,

$A \triangle (B \triangle C) = C \triangle (B \triangle A)$

$= (B \triangle A) \triangle C$ [4–2·26-ன் படி]

$= (A \triangle B) \triangle C$ [4–2·26-ன் படி]

4–3. மாதிரிக் கணக்குகள்

4–3·1. மாதிரிக் கணக்கு

$(A-B) \cup A = A$ என நிறுவுக.

$x \in (A-B) \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A$ [1–10·5(a)-ன் படி]

$\therefore\ A-B \subset A$ [2–5·2-ன் படி]

$\therefore\ (A-B) \cup A = A$ [4–2·3(a)-ன் படி]

4–3·2. மாதிரிக் கணக்கு

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ என நிறுவுக.

$(A \cap B) \cup C = C \cup (A \cap B)$ [4–2·1(a)-ன் படி]

$= (C \cup A) \cap (C \cup B)$ [4–2·11(a)-ன் படி]

$= (A \cup C) \cap (B \cup C)$ [4–2·1(a)-ன் படி]

4–3·3. மாதிரிக் கணக்கு

$A \cap B = \phi \Longrightarrow B \cap A' = B$ என நிறுவுக.

$A \cap B = \phi$ (எடுகோள்)

$B \cap A' = (B \cap A') \cup \phi$ [4–2·5(a)-ன் படி]

$= (B \cap A') \cup (A \cap B)$ [எடுகோள் படி]

$= (B \cap A') \cup (B \cap A)$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= B \cap (A' \cup A)$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= B \cap U$ [4–2·17(a)-ன் படி]

$= B$ [4–2·6(b)-ன் படி]

4–3·4. மாதிரிக் கணக்கு

$(A \cup B) \cap B' = A \Longleftrightarrow A \cap B = \phi$ என நிறுவுக.

பாகம் 1 :

$(A \cup B) \cap B' = A \Longrightarrow A \cap B = \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$(A \cup B) \cap B' = A$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad A \cap B = [(A \cup B) \cap B'] \cap B$

$= (A \cup B) \cap (B' \cap B)$ [4–2·8(b)-ன் படி]

$= (A \cup B) \cap \phi$ [4–2·17(b)-ன் படி]

$= \phi$ [4–2·5(b)-ன் படி]

பாகம் 2 :

$A \cap B = \phi \Longrightarrow (A \cup B) \cap B' = A$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \cap B = \phi$ (எடுகோள்)

$(A \cup B) \cap B' = B' \cap (A \cup B)$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= (B' \cap A) \cup (B' \cap B)$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= (B' \cap A) \cup \phi$ [4–2·17(b)-ன் படி]

$= B' \cap A$ [4–2·5(a)-ன் படி]

$= A \cap B'$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= A - B$ [3–5·6-ன் படி]

$= A$ [எடுகோள் மற்றும் 3–8·4-ன் படி]

4–3·5. மாதிரிக் கணக்கு

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ என நிறுவுக.

$(A \cup B \cup C)' = [(A \cup B) \cup C]'$

$= (A \cup B)' \cap C'$ [4–2·18(a)-ன் படி]

$= (A' \cap B') \cap C'$ [4–2·18(a)-ன் படி]

$= A' \cap B' \cap C'$

4–3·6. மாதிரிக் கணக்கு

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (B' \cup C') = U$ என நிறுவுக.

$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (B' \cup C')$

$= [A \cap (B \cap C)] \cup [A' \cap (B \cap C)] \cup (B' \cup C')$

$= [(B \cap C) \cap A] \cup [(B \cap C) \cap A'] \cup (B' \cup C')$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= [(B \cap C) \cap (A \cup A')] \cup (B' \cup C')$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= [(B \cap C) \cap U] \cup (B' \cup C')$ [4-2·17(a)-ன் படி]

$= (B \cap C) \cup (B' \cup C')$ [4–2·6(b)-ன் படி]

$= (B \cap C) \cup (B \cap C)'$ [4–2·18(b)-ன் படி]

$= U$ [4–2·17(a)-ன் படி]

4–3·7. மாதிரிக் கணக்கு

$A \supset B \Longrightarrow A - (A - B) = B$ என நிறுவுக.

$A \supset B$ (எடுகோள்)

அதாவது $B \subset A$

$A - (A - B) = (A - A) \cup (A \cap B)$ [4–2·22(b)-ன் படி]

$= \phi \cup (A \cap B)$ [4–2·13(b)-ன் படி]

$= A \cap B$ [4-2·5(a)-ன் படி]

$= B \cap A$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$= B$ [எடுகோள் மற்றும் 4–2·3(b)-ன் படி]

4–3·8. மாதிரிக் கணக்கு

$A = B \Longleftrightarrow A \triangle B = \phi$ என நிறுவுக.

பாகம் 1 :

$A = B \Longrightarrow A \triangle B = \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A = B$ (எடுகோள்)

$\therefore A \triangle B = A \triangle A$

$= (A - A) \cup (A - A)$ [3–6·1-ன் படி]

$= \phi \cup \phi$ [4–2·13(b)–ன் படி]

$= \phi$ [4–2·4(a)-ன் படி]

பாகம் 2 :

$A \triangle B = \phi \Longrightarrow A = B$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \triangle B = \phi$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad (A - B) \cup (B - A) = \phi$ [3–6·1-ன் படி]

$\therefore \quad A - B = \phi \wedge B - A = \phi$ [3–8·3-ன் படி]

$\therefore \quad A \subset B \wedge B \subset A$ [4–2·12-ன் படி]

$\therefore \quad A = B$ [2–5·11-ன் படி]

4–3·9. மாதிரிக் கணக்கு

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ என நிறுவுக.

$(A \triangle B) \triangle (A \cap B)$

$= A \triangle [B \triangle (A \cap B)]$ [4–2·29-ன் படி]

$= A \triangle \Big[[B \cup (A \cap B)] - [B \cap (A \cap B)\Big]$ [4–2·27-ன் படி]

$= A \triangle \Big[B - [B \cap (A \cap B)]\Big]$ [4–2·7(a)-ன் படி]

$= A \triangle [B - (A \cap B)]$ [$\because A \cap B \subset B$]

$= A \triangle (B - A)$ [4–2·21(a)-ன் படி]

$= A \triangle (B \cap A')$ [3–5·6-ன் படி]

$= [A \cup (B \cap A')] - [A \cap (B \cap A')]$ [4–2·27-ன் படி]

$= [(A \cup B) \cap (A \cup A')] - [A \cap (B \cap A')]$ [4–2.11(a)-ன் படி]

$= [(A \cup B) \cap U] - [A \cap (B \cap A')]$ [4–2·17(a)-ன் படி]

$= (A \cup B) - [A \cap (B \cap A')]$ [4–2·6(b)-ன் படி]

$= (A \cup B) - [A \cap A') \cap B]$ [4–2·10-ன் படி]

$= (A \cup B) - (\phi \cap B)$ [4–2·17(b)-ன் படி]

$= (A \cup B) - \phi$ [4–2·5(b)-ன் படி]

$= A \cup B$ [4–2·14-ன் படி]

பயிற்சி 4 (அ)

கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக :

1. $(B - A) \cup B = B$
2. $(A - B) \cap A = A - B$
3. $A = B' \Longleftrightarrow A' = B$
4. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$
5. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
7. $A \cap B = \phi \Longrightarrow A \cup B' = B'$
8. $[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \cap (A' \cup B) = A \cap B$
9. $(A - B)' = A' \cup B$
10. $(A \cap B')' \cup B = A' \cup B$
11. $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
12. $(A - B) \cap B = \phi$
13. $(A - B) - A = \phi$
14. $(A - B) - B = A - B$
15. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
16. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
17. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
18. $(A \cup B) - B = A - B$
19. $(A - B) \cup B = A \cup B$
20. $A \cup (B - A) = A \cup B$
21. $(A \cap B) \cup (A - B) = A$
22. $A \supset B \Longleftrightarrow (A - B) \cup B = A$
23. $A \cup B = C \wedge A \cap B = \phi \Longrightarrow A = C - B$
24. $A - (A \cap B) = A - B$

25. $A - (A - B) = A \cap B$

26. $A \triangle A = \phi$

27. $A \triangle \phi = A$

28. $A \triangle U = A'$

29. $A \triangle A' = U$

30. $A \triangle B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

31. $A \triangle B = A' \triangle B'$

32. $(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (B \triangle A)$

33. $A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A \triangle B = A \cup B$

34. $A - B = A \triangle (A \cap B)$

பயிற்சி 4 (ஆ)

1. $A \cap B = A \cap C$ எனில், $B = C$ என இருக்க வேண்டுமா ?

2. $A \cap B = A \cup B$ எனில், A-ம் B-ம் எப்படி இருக்க வேண்டும்?

3. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்பி, கீழ்வருபவைகளைப் பொது உண்மைகளாக்கு.

(a) $A \subset B$ எனில், அப்பொழுது $A \cup B = \underline{B}$

(b) $A \cap B = B$ எனில், அப்பொழுது A ——— B.

(c) $A \cup B = A$ எனில், அப்பொழுது A ——— B.

(d) A ——— $A \cup B$

(e) A ——— $A \cap B$

(f) $A \cap B$ ——— $A \cup B$

(g) $A \cap (A \cap B) =$ ———

(h) $A \cap (A \cup B) =$ ———

(i) $(A \cap A) \cap A =$ ———

(j) $(A \cap \phi) \cap A =$ ———

(k) $A \cup (B \cap A) =$ ———

4. கீழ்வரும் ஒவ்வொன்றும் பொது உண்மையா, அல்லவா, என்பதை வலப்பக்கம் உள்ள பொருத்தமான நிரலில் √ அடையாளமிட்டுக் காட்டுக.

	பொது உண்மை	பொது உண்மையல்ல
(a) $A \cap A' = \phi$	√	
(b) $A \cup A' = \phi$		
(c) $A \cap A' = U$		
(d) $A \cup A' = U$		
(e) $(A')' = A$		
(f) $A \subset U$		
(g) $A \cap A = \phi$		
(h) $A \cap A = U$		
(i $U \cup \phi = \phi$		
(j) $A \cup A = U$		
(k) $(A \cup B)' = A' \cup B'$		
(l) $(A \cap B)' = A' \cup B'$		
(m) $(A \cap B)' = A' \cap B'$		
(n) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$		
(o) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$		
(p) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$		
(q) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$		
(r) $A - (B - C) = (A - B) - C$		
(s) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$		
(t) $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$		

விடைகள்

பயிற்சி 4 (ஆ)

1. $B = C$ என இருக்க வேண்டியதில்லை.

2. $A = B$ என இருக்க வேண்டும்.

3. (b) $A \supset B$

   (c) $A \supset B$

   (d) $A \subset A \cup B$

   (e) $A \supset A \cap B$

   (f) $A \cap B \subset A \cup B$

   (g) $A \cap (A \cap B) = A \cap B$

   (h) $A \cap (A \cup B) = A$

   (i) $A \cap (A \cap A) = A$

   (j) $(A \cap \phi) \cap A = \phi$

   (k) $A \cup (B \cap A) = A$

4–4. பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூட்டும், இடைவெட்டும் (Generalised Union and Intersection)

A_1, A_2, A_3 என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup A_3 \cup A_2 = A_2 \cup A_1 \cup A_3$$
$$= A_2 \cup A_3 \cup A_1 = A_3 \cup A_1 \cup A_2 = A_3 \cup A_2 \cup A_1$$

என அறிவோம். மேலே எழுதப்பட்டுள்ள ஆறு கோவைகளில் எங்கு வேண்டுமானாலும் அடைப்புகளை இடலாம். எனவே, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ என்ற கணத்தைக் காண, A_1, A_2, A_3 என்ற கணங்களுள் ஏதாவது ஒன்றைப் பிறிதொன்றுடன் கூட்டி, கிடைத்த முடிவை எஞ்சியுள்ள கணத்துடன் கூட்டினால் போதும். அதாவது, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ என்ற கணத்தைக் காண்பதற்கு A_1, A_2, A_3 என்ற கணங்களை எந்த வரிசையில் கூட்டுகிறோம் என்பதும், எந்த இரு கணங்களை முதலில் கூட்டுகிறோம் என்பதும் முக்கியமல்ல. நாம் மேலே கூறிய அனைத்தும் $A_1 \cap A_2 \cap A_3$-க்கும் பொருந்தும். எனவே, கணக் கூட்டு, இடைவெட்டு என்ற இரு செயல்களையும் எத்தனை கணங்களுக்கு வேண்டுமானாலும் விரிவுபடுத்தலாம்.

4–4·1. வரையறை

$\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் என்க. இதன் உறுப்புகளான A_i-களின் கூட்டுக் கணத்தை $\bigcup_{i \in I} A_i$ ஆல் குறிக்கிறோம். இது கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists j \in I \ni x \in A_j\}$$

இதைப் பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூட்டுக் கணம் (generalised union set) என அழைக்கிறோம். $I = N_n$ எனில்,

$\bigcup_{i \in I} A_i$ ஐ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ என்றும், $I = N$ எனில்

$\bigcup_{i \in I} A_i$ ஐ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ என்றும் எழுதுகிறோம்.

4–4·2. வரையறை

$\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் என்க. இதன் உறுப்புகளான A_i-களின் இடைவெட்டுக் கணத்தை $\bigcap_{i \in I} A_i$ ஆல் குறிக்கிறோம். இது கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \ , \ \forall i \in I\}$$

இதைப் பொதுப்படுத்தப்பட்ட இடைவெட்டுக் கணம் (generalised intersection set) என அழைக்கிறோம்.

$I = N_n$ எனில், $\bigcap_{i \in I} A_i$ ஐ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ என்றும்,

$I = N$ எனில், $\bigcap_{i \in I} A_i$ ஐ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ என்றும் அழைக்கிறோம்.

கீழ்வருபவை பொதுப்படுத்தப்பட்ட கூட்டுக் கணம், இடைவெட்டுக் கணம் ஆகியவற்றிற்கு எடுத்துக்காட்டுகள்.

4–4·3. எடுத்துக்காட்டு

$I = \{a, b, c\}$, $A_a = \{6, 3, 2\}$, $A_b = \{2, 8, 3, 7, 5\}$, $A_c = \{7, 2, 10, 3\}$ எனில், அப்பொழுது

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{6, 3, 2, 8, 7, 5, 10\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{3, 2\}.$$

4–4·4. எடுத்துக்காட்டு

$n \in N$, $A_n = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\dots, \frac{1}{n} \right\}$ எனில்

அப்பொழுது,

$$\bigcup_{i \in N} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\dots \right\}$$

$$\bigcap_{i \in N} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{1\}$$

4–4·5. தேற்றம்

$\{Ai\}_{i \in I}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் என்க.

(a) $\forall i \in I$, $A_i \subset B$ எனில், அப்பொழுது $\bigcup_{i \in I} A_i \subset B$.

(b) $\forall i \in I$, $B \subset A_i$ எனில், அப்பொழுது $B \subset \bigcap_{i \in I} A_i$.

நிறுவல் :

(a) $\forall i \in I$, $A_i \subset B$ (எடுகோள்)

எனவே, 2–5·2-ன் படி, $\forall i \in I$, $x \in A_i \Longrightarrow x \in B$ ... (1)

இப்பொழுது,

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Longrightarrow \exists\, j \in I \ni x \in A_j$ [4–4·1-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in B$ [(1)-ன் படி]

$\therefore \bigcup_{i \in I} A_i \subset B$ [2–5·2-ன் படி]

(b)-ன் நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

4–4·6. தேற்றம் [பொதுப்படுத்தப்பட்ட டி மார்கன் விதிகள்— Generalised De Morgan's Laws]

$\{A_i\}_{i \in I}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் என்க.

அப்பொழுது (a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$

(b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

நிறுவல்

(a) $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' \Longleftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ [3–5·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow \forall\, i \in I,\ x \notin A_i$

$\Longleftrightarrow \forall\, i \in I,\ x \in A_i'$ [3–5·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i'$ [4–4·2-ன் படி]

$\therefore \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$ [2–3·2-ன் படி]

(b)-ன் நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

4–4·7. தேற்றம்

$\{A_i\}_{i \in I}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம், B ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. அப்பொழுது

(a) $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$

(b) $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

நிறுவல்

(a) $x \in B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)$

$\Longleftrightarrow x \in B \wedge x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in B \wedge [\exists j \in I \ni x \in A_j]$ [4–4·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow \exists\ j \in I \ni (x \in B \wedge x \in A_j)$

$\Longleftrightarrow \exists j \in I \ni x \in B \cap A_j$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$ [4–4·1-ன் படி]

$\therefore\ B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$ [2–3·2-ன் படி]

(b)-ன் நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

பயிற்சி 4 (இ)

1. $I = \{a, b, c, d\}$, $A_a = \{1, 10\}$, $A_b = \{2, 4, 6, 10\}$, $A_c = \{10, 4, 8\}$, $A_d = \{10, 6, 3, 9\}$ எனில், $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. $n \in N$, $A_n = \{x \mid x \in \mathrm{V} \wedge x$ ஆனது n-ன் ஒரு மடங்கு$\}$ எனில், $\bigcup_{i \in N} A_i$, $\bigcap_{i \in N} A_i$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $\{A_i\}_{i \in I}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் என்க.

   $\forall\ i \in I$, $B \subset A_i$ எனில், $B \subset \bigcap_{i \in I} A_i$ என நிறுவுக.

4. $\{A_i\}_{i \in I}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் எனில், $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$ என நிறுவுக.

5. $\{A_i\}_{i \in I}$ ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம், B ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில்,

   $B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ 1, 10, 2, 4, 6, 8, 3, 9 \}$

$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ 10 \}$

2. $\bigcup_{i \in N} A_i = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\bigcap_{i \in N} A_i = \phi$

4–5. முடிவுள்ள கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

4–5·1. முன்னுரை

கணங்களை அவற்றில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் முடிவுள்ள கணங்கள், முடிவில்லாக் கணங்கள் என இரு வகைப்படுத்தினோம். A ஒரு முடிவுள்ள கணம் எனில், அதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை $n(A)$ அல்லது $n\ [A]$ ஆல் குறிக்கிறோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள முடிவுள்ள கணங்களின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை தெரிந்தால், அவற்றோடு கணக் கூட்டு, இடை வெட்டு, நிரப்புதல் ஆகிய செயல்களால் சம்பந்தப் பட்ட கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைத் தெரிந்து கொள்ள ஆவல் ஏற்படுவது இயல்பே. சான்றாக, கம்பெனி A-ன் இயக்குநர் குழுவில் 11 பேர்களும், கம்பெனி B-ன் இயக்குநர் குழுவில் 7 பேர்களும் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். அப்பொழுது குறைந்தது ஒரு குழுவில் உறுப் பினராக உள்ளவர்கள் எத்தனை பேர் எனக் காண முடியுமா? இரு குழுக்களிலும் உறுப்பினர்களாக உள்ளவர்கள் எத்தனை பேர் என்று தெரியும் வரை இக் கேள்விக்கு விடை கூற முடியாது. எந்த இயக்குநரும் அவ்விரு குழுக்களிலும் உறுப்பினராக இல்லை எனில், அதாவது அவ்விரு குழுக்களும் பொது உறுப்பில் கணங்கள் எனில், அப்பொழுது 11, 7 என்ற இரு எண்களின் கூட்டுத் தொகையான 18 நமது கேள்வியின் விடையாகும். எனவே, A, B என்பன பொது உறுப்பில்லாத எவையேனும் இரு முடிவுள்ள கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

4–5·2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

இதேபோல், A, B, C என்பன இரட்டை இரட்டையாகப் பொது உறுப்பில்லாத எவையேனும் மூன்று முடிவுள்ள கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

4–5·3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

இதேபோல், A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று முடிவுள்ள கணங்கள் என்றாலும், $n(A \cup B)$, $n(A \cup B \cup C)$ ஆகியவற்றிற்குச் சூத்திரங்கள் இருந்தால் நலமாக இருக்குமல்லவா?

4–5·4. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு முடிவுள்ள கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

நிறுவல்:

$x \in A \cap B' \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B'$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ [3–5·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin A \cap B$

எனவே, 3–3·11-ன் படி,

$$(A \cap B') \cap (A \cap B) = \phi \quad \dots (1)$$

$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B)$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= A \cap U$ [4–2·17(a)-ன் படி]

$= A \quad \dots (2)$ [4–2·6(b)-ன் படி]

(1), (2)-லிருந்து A ஐ $A \cap B'$, $A \cap B$ என்ற பொது உறுப்பில் கணங்களாகப் பிரிக்கலாம் என அறிகிறோம். இதேபோல், B ஐ $A' \cap B$, $A \cap B$ என்ற பொது உறுப்பில் கணங்களாகப் பிரிக்கலாம். எனவே, 4–5·2-ன் படி,

$$n(A) = n(A \cap B') + n(A \cap B) \quad \dots (3)$$

$$n(B) = n(A' \cap B) + n(A \cap B) \quad \dots (4)$$

$x \in A \cap B' \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B'$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin A' \wedge x \notin B$ [3–5·3 மற்றும் 3–5·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \notin A' \cap B$

$\therefore \quad (A \cap B') \cap (A' \cap B) = \phi$ [3–3·11-ன் படி]

எனவே, $A \cap B'$, $A \cap B$, $A' \cap B$ என்பன இரட்டை இரட்டையாகப் பொது உறுப்பில் கணங்கள், மேலும்,

$(A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

$= A \cup (A' \cap B)$ [(2)-லிருந்து]

$= (A \cup A') \cap (A \cup B)$ [4–2·11 (a)-ன் படி]

$= U \cap (A \cup B)$ [4–2·17 (a)-ன் படி]

$= A \cup B$ [4–2.6 (b)-ன் படி]

எனவே, 4–5·3-ன் படி,

$n(A \cup B) = n(A \cap B') + n(A \cap B) + n(A' \cap B)$ ...... (5)

(5) – (3) – (4),

$n(A \cup B) - n(A) - n(B) = -n(A \cap B)$

$\therefore \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$

4–5·5. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று முடிவுள்ள கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

நிறுவல் :

$n(A \cup B \cup C)$

$= n[A \cup (B \cup C)]$

$= n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$ [4–5·4-ன் படி]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)]$ [4–5·4-ன் படி]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$ [4–2·11(b)-ன் படி]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - \{n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]\}$ [4–5·4-ன் படி]

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$

4·6. மாதிரிக் கணக்குகள்

4–6·1. மாதிரிக் கணக்கு

1003 குடும்பங்கள் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு புள்ளி விவர ஆய்வில் (statistical investigation) இருந்து, 794 குடும்பங்களில் ரேடியோக்கள் இருந்தன என்றும், 187 குடும்பங்களில் தொலைக் காட்சிப் பெட்டிகள் இருந்தன என்றும், 63 குடும்பங்களில் ரேடியோவும் இல்லை, தொலைக்காட்சிப் பெட்டியும் இல்லை என்றும் தெரிந்தது. எத்தனை குடும்பங்களில் இரண்டும் இருந்தன ?

U = { ஆய்வில் சம்பந்தப்பட்ட குடும்பங்கள் },

A = { ரேடியோ உள்ள குடும்பங்கள் },

B = { தொலைக்காட்சிப் பெட்டி உள்ள குடும்பங்கள் } என்க. அப்பொழுது,

$A \cup B$ = { ரேடியோ அல்லது தொலைக்காட்சிப் பெட்டி உள்ள குடும்பங்கள் },

$(A \cup B)'$ = { ரேடியோவும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டியும் இல்லாத குடும்பங்கள் },

$A \cap B$ = { ரேடியோவும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டியும் உள்ள குடும்பங்கள் },

$n(U) = 1003,$

$n(A) = 794,$

$n(B) = 187,$

$n[(A \cup B)'] = 63.$

U-ஐ $(A \cup B)$, $(A \cup B)'$ என்ற பொது உறுப்பில் கணங்களாகப் பிரிக்கலாம். எனவே, 4–5·2-ன் படி,

$$n(A \cup B) + n[(A \cup B)'] = n(U)$$

$$\therefore \quad n(A \cup B) + 63 = 1003$$

$$\therefore \quad n(A \cup B) = 940$$

4–5·4-ன் படி,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\therefore \quad 940 = 794 + 187 - n(A \cap B)$$

$$\therefore \quad n(A \cap B) = 794 + 187 - 940$$
$$= 981 - 940$$
$$= 41$$

எனவே, 41 குடும்பங்களில் இரண்டும் இருந்தன.

4–6·2. மாதிரிக் கணக்கு

30 பேர்களைப் பற்றி, கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரங்கள் (statistics) தரப்பட்டுள்ளன.

சங்கம் A-ன் உறுப்பினர்கள்	19 பேர்
சங்கம் B-ன் உறுப்பினர்கள்	17 பேர்
சங்கம் C-ன் உறுப்பினர்கள்	11 பேர்
A, B-களின் உறுப்பினர்கள்	12 பேர்
A, C-களின் உறுப்பினர்கள்	7 பேர்
B, C-களின் உறுப்பினர்கள்	5 பேர்
A, B, C-களின் உறுப்பினர்கள்	2 பேர்

(a) மூன்றுள் ஒன்றிலும் உறுப்பினராக இல்லாதவர்கள் எத்தனை பேர்?

(b) A-ன் உறுப்பினராக, ஆனால் C-ன் உறுப்பினராக இல்லாதவர்கள் எத்தனை பேர் ?

(c) மூன்றுள் சரியாக (exactly) இரண்டில் உறுப்பினராக உள்ளவர்கள் எத்தனை பேர் ?

கொடுக்கப்பட்டுள்ள 30 பேர்களை மட்டும் உறுப்பினர்களாகக் கொண்ட கணத்தை U என்க.

அப்பொழுது,
$$n(U) = 30,$$
$$n(A) = 19,$$
$$n(B) = 17,$$
$$n(C) = 11,$$
$$n(A \cap B) = 12,$$
$$n(A \cap C) = 7,$$
$$n(B \cap C) = 5,$$
$$n(A \cap B \cap C) = 2.$$

(a) $n(A \cup B \cup C)$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$ [4–5·5-ன் படி]

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 19 + 17 + 11 - 12 - 7 - 5 + 2$$
$$= 49 - 24$$
$$= 25.$$

எனவே, மூன்றுள் குறைந்தது ஒரு சங்கத்திலாவது உறுப்பினராக உள்ளவர்கள் 25 பேர்.

ஆகவே, மூன்றுள் ஒன்றிலும் உறுப்பினராக இல்லாதவர்களின் எண்ணிக்கை $= n(U) - 25$

$$= 30 - 25$$
$$= 5.$$

(b) A ஐ $A \cap C$, $A \cap C'$ என்ற பொது உறுப்பில் கணங்களாகப் பிரிக்கலாம். எனவே, 4–5·2-ன் படி,

$$n(A \cap C) + n(A \cap C') = n(A)$$
$$\therefore 7 + n(A \cap C') = 19$$
$$\therefore n(A \cap C') = 12$$

எனவே, A-ன் உறுப்பினராக உள்ளவர்கள், ஆனால் C-ன் உறுப்பினராக இல்லாதவர்கள் 12 பேர்.

(c) $A \cap B$ ஐ $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap C'$ என்ற பொது உறுப்பில் கணங்களாகப் பிரிக்கலாம். எனவே, 4–5·2-ன் படி,

$$n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B)$$
$$\therefore 2 + n(A \cap B \cap C') = 12$$
$$\therefore n(A \cap B \cap C' = 10$$

எனவே, A-லும் B-லும் மட்டும் உறுப்பினராக உள்ளவர்கள் 10 பேர்.

இதேபோல், A-லும் C-லும் மட்டும் உறுப்பினராக உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= n(A \cap B' \cap C)$$
$$= n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

$= 7 - 2$

$= 5$

B-லும் C-லும் மட்டும் உறுப்பினராக உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை $= n(A' \cap B \cap C)$

$= n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$

$= 5 - 2$

$= 3.$

எனவே, மூன்றில், சரியாக இரண்டில் உறுப்பினராக உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை

$= n(A \cap B \cap C') + n(A \cap B' \cap C) + n(A' \cap B \cap C)$

$= 10 + 5 + 3$

$= 18.$

4–6·3. மாதிரிக் கணக்கு

200 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு பள்ளியில் ஒவ்வொருவரும் சிறுகதை, கவிதை அல்லது கட்டுரை படிக்கும் வழக்கம் உடையவர்கள். அவர்களைப் பற்றிய ஆய்விலிருந்து கீழ்க்கண்ட அறிக்கை வெளியிடப்பட்டது.

சிறுகதை படிப்போர்	110 பேர்
கவிதை படிப்போர்	100 பேர்
கட்டுரை படிப்போர்	90 பேர்
சிறு கதை மற்றும் கவிதை படிப்போர்	60 பேர்
சிறுகதை மற்றும் கட்டுரை படிப்போர்	40 பேர்
கவிதை மற்றும் கட்டுரை படிப்போர்	24 பேர்
மூன்றும் படிப்போர்	20 பேர்

மேற்படி அறிக்கை பிழையுடையது என நிறுவுக. சிறுகதை, மற்றும் கவிதை படிப்போரின் எண்ணிக்கையை எழுதுவதில் பிழை ஏற்பட்டுள்ளது எனில், உண்மையான எண்ணிக்கை என்ன?

U = {மாணவர்கள்},

A = {சிறு கதை படிப்போர்},

B = {கவிதை படிப்போர்},

C = {கட்டுரை படிப்போர்} என்க.

அப்பொழுது,

$$n(A \cup B \cup C) = 200,$$
$$n(A) = 110,$$
$$n(B) = 100,$$
$$n(C) = 90,$$
$$n(A \cap B) = 60,$$
$$n(A \cap C) = 40,$$
$$n(B \cap C) = 24,$$
$$n(A \cap B \cap C) = 20.$$

இப்பொழுது, 4–5·5-ன் படி,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\therefore \quad n(A \cup B \cup C) = 110 + 100 + 90 - 60 - 40 - 24 + 20$$

$$= 320 - 124$$
$$= 196$$

ஆனல், $n(A \cup B \cup C) = 200.$

எனவே, அறிக்கை பிழையுடையது.

இப்பொழுது, 4–5·5-ன் படி

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\therefore \quad 200 = 110 + 100 + 90 - n(A \cap B) - 40 - 24 + 20$$

$$= 320 - 64 - n(A \cap B)$$
$$= 256 - n(A \cap B)$$

$$\therefore \quad n(A \cap B) = 256 - 200 = 56$$

எனவே, சிறு கதை மற்றும் கவிதை படிப்போரின் உண்மையான எண்ணிக்கை 56.

பயிற்சி 4 (ஈ)

1. 90 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவில் ஒவ்வொருவருக்கும் தமிழ் அல்லது தெலுங்கு தெரியும். 65 பேருக்குத் தமிழ் தெரியும்; 37 பேருக்குத் தெலுங்கு தெரியும் எனில், இரண்டும் தெரிந்தவர்கள் எத்தனை பேர் ?

2. 36 பேர் கொண்ட ஒரு பயணக் குழுவில் திருமணமானவர்கள் 17 பேரும், ஆண்கள் 13 பேரும், திருமணமான ஆண்கள் 5 பேரும் இருந்தார்கள். அந்தக் குழுவில் திருமணமாகாத பெண்கள் எத்தனை பேர் ?

3. ஒரு தேர்வின் முடிவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

I ஆம் பாகத்தில் தேறியவர்கள் 134 பேர்

II ஆம் பாகத்தில் தேறியவர்கள் 113 பேர்

III ஆம் பாகத்தில் தேறியவர்கள் 148 பேர்

பாகம் I மற்றும் பாகம் II -ல் தேறியவர்கள் 35 பேர்

பாகம் I மற்றும் பாகம் III-ல் தேறியவர்கள் 54 பேர்

பாகம் II மற்றும் பாகம் III-ல் தேறியவர்கள் 46 பேர்

மூன்று பாகங்களிலும் தேறியவர்கள் 30 பேர்.

குறைந்தது ஒரு பாகத்தில் தேறியவர்கள் எத்தனை பேர் ?

4. 50 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொருவரும் கால் பந்து, கூடைப் பந்து அல்லது பூப் பந்து விளையாடுகிறார்கள். அவர்களைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

கால் பந்து விளையாடுகிறவர்கள்	31 பேர்
கூடைப் பந்து விளையாடுகிறவர்கள்	25 பேர்
பூப் பந்து விளையாடுகிறவர்கள்	22 பேர்
கால் பந்தும் கூடைப் பந்தும் விளையாடுகிறவர்கள்	13 பேர்
கால் பந்தும் பூப் பந்தும் விளையாடுகிறவர்கள்	11 பேர்
கூடைப் பந்தும் பூப் பந்தும் விளையாடுகிறவர்கள்	10 பேர்

(a) மூன்றும் விளையாடுகிறவர்கள் எத்தனை பேர் ?

(b) கூடைப் பந்து விளையாடுகிறவர்கள், ஆனால் பூப் பந்து விளையாடாதவர்கள் எத்தனை பேர் ?

(c) சரியாக இரண்டு விளையாட்டுகள் விளையாடுகிறவர்கள் எத்தனை பேர் ?

(d) ஒரே ஒரு விளையாட்டு மட்டும் விளையாடுகிறவர்கள் எத்தனை பேர் ?

5. ஒரு கல்லூரியிலுள்ள 85 மாணவர்கள் விளையாடும் விளையாட்டுகள் பற்றிய அறிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

கால் பந்து விளையாடுகிறவர்கள்	42 பேர்
பூப் பந்து விளையாடுகிறவர்கள்	30 பேர்
கூடைப் பந்து விளையாடுகிறவர்கள்	28 பேர்
கால் பந்தும் பூப் பந்தும் விளையாடுகிறவர்கள்	5 பேர்
கால் பந்தும் கூடைப்பந்தும் விளையாடுகிறவர்கள்	10 பேர்
பூப் பந்தும் கூடைப்பந்தும் விளையாடுகிறவர்கள்	8 பேர்
மூன்றும் விளையாடுகிறவர்கள்	6 பேர்
ஒன்றும் விளையாடாதவர்கள்	5 பேர்.

மேற்படி அறிக்கை பிழையுடையது என நிறுவுக. மூன்றும் விளையாடுகிறவர்களின் எண்ணிக்கையை எழுதுவதில் பிழை ஏற்பட்டுள்ளது எனில், உண்மையான எண்ணிக்கை யாது?

விடைகள்

1. 12 2. 11 3. 290

4. (a) 6 (b) 15 (c) 16 (d) 28

5. 3

5. தேக்காட்டின் பெருக்கம்
(Cartesian Product)

5–1. வரிசைப்படா இரட்டை (Unordered Pair)

ஓர் உறுப்புள்ள கணத்தை ஒருறுப்புக் கணம் என அழைக்கிறோம். $x \in \{ a \}$ எனில், அதாவது, x என்பது $\{ a \}$ என்ற ஒருறுப்புக் கணத்தின் உறுப்பு எனில், $x = a$ என்பது தெளிவு. இரண்டு உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தை இரட்டை அல்லது ஜோடி (pair) என்கிறோம். a, b என்பவை எவையேனும் இரு தனித் தனிப் பொருள்கள் எனில், $\{ a, b \}$ ஓர் இரட்டையாகும். $\{ a, b \} = \{ b, a \}$ என அறிவோம். அதாவது உறுப்புகளை எந்த வரிசையிலும் எழுதலாம். எனவே, $\{ a, b \}$ ஐ ஒரு வரிசைப்படா இரட்டை (unordered pair) எனவும் அழைக்கிறோம்.

5–1·1. தேற்றம்

$\{ a, b \} = \{ c, d \}$ எனில், அப்பொழுது

$[a = c \wedge b = d] \vee [a = d \wedge b = c]$

நிறுவல் :

$\{ a, b\} = \{ c, d \}$ (எடுகோள்)

$a = b$ அல்லது $a \neq b$ என்பதற்கிணங்க இரு வகைகளையும் (cases) தனித்தனியே ஆராய்வோம்.

வகை 1:

$a = b$ என்க.

$c \in \{ c, d \}$ ஆனால் $\{ c, d\} = \{a, b \}$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $c \in \{ a, b\}$. ஆனால் $b = a$ (தற்கோள் - assumption)

$\therefore$ $c \in \{ a \}$

$\therefore$ $c = a$

இதேபோல், $d = a$ என நிறுவலாம்.

ஆனால், $a = b$ (தற்கோள்)

$\therefore \quad a = b = c = d$

எனவே, நிறுவல் முடிந்தது.

வகை 2:

$a \neq b$ என்க.

$a \in \{a, b\}$

ஆனால், $\{a, b\} = \{c, d\}$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad a \in \{c, d\}$

$\therefore \quad a = c$ அல்லது $a = d$. இந்த இரு வகைகளையும் தனித் தனியே ஆராய்வோம்.

வகை 2(i) :

$a = c$ என்க.

$b \in \{a, b\}$

ஆனால் $\{a, b\} = \{c, d\}$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad b \in \{c, d\}$

$\therefore \quad b = c$ அல்லது $b = d$

$b = c$ எனில், $a = c$ ஆக இருப்பதால், $a = b$.

ஆனால் $a \neq b$ (தற்கோள்).

இது ஒரு முரண்பாடு.

$\therefore \quad b = c$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad b = d.$

இந்த விதமாக, $a = c \wedge b = d.$

எனவே, நிறுவல் முடிந்தது.

வகை 2(ii) :

$a = d$ என்க.

$b \in \{a, b\}$

ஆனால் $\{a, b\} = \{c, d\}$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad b \in \{c, d\}$

$\therefore \quad b = c$ அல்லது $b = d.$

$b = d$ எனில், $a = d$ என இருப்பதால், $a = b$.

ஆனால் $a \neq b$ (தற்கோள்).

இது ஒரு முரண்பாடு.

$\therefore$ $b = d$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore$ $b = c$

இந்த விதமாக, $a = d \wedge b = c$.

எனவே, நிறுவல் முடிந்தது.

5–2. வரிசைப்பட்ட இரட்டை (Ordered Pair)

5–2·1. வரையறை

a, b என்பன எவையேனும் இரு பொருள்கள் எனில்,

$\{\{a\}, \{a, b\}\}$ என்ற கணத்தை (a, b) என்ற வரிசைப்பட்ட இரட்டை (ordered pair) என வரையறுக்கிறோம்.

அதாவது, $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

வரையறையிலிருந்து,

$$(b, a) = \{\{b\}, \{b, a\}\}$$

$$= \{\{b\}, \{a, b\}\}$$ என அறிகிறோம்.

எனவே, (a, b), (b, a) என்ற இரு வரிசைப்பட்ட இரட்டைகளுக்கிடையே தெளிவான வேறுபாடு உள்ளது.

நாம் வரையறுத்த வரிசைப்பட்ட இரட்டைகள், பெயருக்கு ஏற்றவாறு, அடிப்படைப் பண்பு (fundamental property) உடையவை என்பதை அடுத்த தேற்றம் காட்டும்.

5–2·2. தேற்றம்

$$a = c \wedge b = d \iff (a, b) = (c, d)$$

நிறுவல் :

பாகம் 1 :

$a = c \wedge b = d \implies (a, b) = (c, d)$ என நிறுவ வேண்டும்.

$a = c \wedge b = d$ (எடுகோள்)

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ [5–2·1-ன் படி]

$= \{\{c\}, \{c, d\}\}$ [எடுகோள் படி

$= (c, d)$

பாகம் 2 :

$(a, b) = (c, d) \Longrightarrow a = c \wedge b = d$ என நிறுவவேண்டும்.

$(a, b) = (c, d)$ [எடுகோள்]

$\therefore \quad \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ [5–2·1-ன் படி]

எனவே, 5–1·1-ன் படி,

$[\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}]$ அல்லது

$[\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}]$

இந்த இரு வகைகளையும் தனித்தனியே ஆராய்வோம்.

வகை 1 :

$\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$ என்க.

$\{a\} = \{c\}$ என்பதிலிருந்து, $a = c$.

$\{a, b\} = \{c, d\}$ என்பதிலிருந்து, 5–1·1-ன் படி,

$[a = c \wedge b = d]$ அல்லது $[a = d \wedge b = c]$.

$a = c \wedge b = d$ எனில், நிறுவல் முடிந்து விட்டது.

$a = d \wedge b = c$ எனில், $a = c$ என ஏற்கெனவே நிறுவியுள்ளதால், $b = c = a = d$.

அதாவது, $a = c \wedge b = d$.

எனவே, நிறுவல் முடிந்துவிட்டது.

வகை 2 :

$\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}$ என்க.

$c \in \{c, d\}$

ஆனால் $\{c, d\} = \{a\}$ (தற்கோள்)

$\therefore \quad c \in \{a\}$

$\therefore \quad c = a$

இதேபோல், $d = a$ என நிறுவலாம்.

$b \in \{a, b\}$

ஆனால் $\{a, b\} = \{c\}$ (தற்கோள்)

$\therefore \quad b \in \{c\}$

$\therefore \quad b = c.$

இந்த விதமாக, $a = b = c = d$

அதாவது, $a = c \wedge b = d.$

எனவே, நிறுவல் முடிந்துவிட்டது.

கணம் A ஆனது ஒரு வரிசைப்பட்ட இரட்டை, எனில், a, b என்ற தனித்த (unique) பொருள்களால்

$A = (a, b)$ என எழுத, தேற்றம் 5–2·2 துணை செய்கிறது. எனவே அடுத்து வரும் வரையறை மிகவும் பொருத்தமானது.

5–2·3. வரையறை

a ஐ (a, b)-ன் முதற் கூறு (first component or co-ordinate) என்றும், b ஐ (a, b)-ன் இரண்டாம் கூறு (second component or co-ordinate) என்றும் அழைக்கிறோம்.

வரிசைப்பட்ட இரட்டை என்பது கணிதத்தில் மிகவும் பயனுள்ள ஒரு கருத்து. இதன் உடனடிப் பயன் நம்மை வியப்பில் ஆழ்த்தும். இது வரிசைப்பட்ட மும்மை (ordered triple), வரிசைப் பட்ட n-மை (ordered n-tuple) ஆகியவற்றை வரையறுக்கத் துணை செய்கிறது. இதுவே அதன் உடனடிப் பயன் ஆகும்.

a, b, c என்பன எவையேனும் மூன்று பொருள்கள் எனில், (a, b, c) என்ற வரிசைப்பட்ட மும்மையை,

5–2·4. $(a, b, c) = ((a, b), c)$
என வரையறுக்கிறோம்.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்பன எவையேனும் n பொருள்கள் எனில், $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ என்ற வரிசைப்பட்ட n-மை

5–2·5. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}), a_n)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

5–2·6. $a_i = b_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, n$
$\Longleftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ என நிறுவலாம்.
நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

5·3. தேக்காட்டின் பெருக்கம் (Cartesian Product)

5–3·1. வரையறை

A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது $a \in A$, $b \in B$ என இருக்குமாறு அமையும் (a, b) என்ற எல்லா வரிசைப்

பட்ட இரட்டைகளை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை A, B-க்களின் தேக்காட்டின் பெருக்கம் (Cartesian product) என்கிறோம். இதை $A \times B$ என எழுதுகிறோம். இதை, 'A குறுக்கு B' எனப் படிக்கிறோம்.

தேக்காட்டின் பெருக்கத்தைக் கார்டீசியன் பெருக்கம் என்றும், பெருக்குக் கணம் (product set) என்றும், சுருக்கமாகப் பெருக்கம் என்றும் அழைக்கிறோம்.

குறியீட்டில்,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

அதாவது,

5–3·2. $(a, b) \in A \times B \Longleftrightarrow a \in A \wedge b \in B$

எனவே,

5–3·3. $(a, b) \notin A \times B \Longleftrightarrow a \notin A \vee b \notin B.$

கீழ்வருபவை தேக்காட்டின் பெருக்கத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

5–3·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 2, 4 \}$ எனில், அப்பொழுது

$A \times B = \{ (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4) \}$,

$B \times A = \{ (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3) \}$.

$A \times B$, $B \times A$ என்ற கணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஆறு உறுப்புகள் உள்ளன. மேலும், $(1, 2) \in A \times B$; ஆனால் $(1, 2) \notin B \times A$. எனவே, $A \times B \neq B \times A$. ஆகவே, தேக்காட்டின் பெருக்கலுக்குப் (Cartesian multiplication) பரிமாற்றுப் பண்பு கிடையாது.

5–3·5. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ சி, வா $\}$, $B = \{$ வா, சி $\}$ எனில், அப்பொழுது

$A \times B = \{$ (சி, வா), (சி, சி), (வா, வா), (வா, சி) $\}$,

$B \times A = \{$ (வா, சி), (வா, வா), (சி, சி), (சி, வா) $\}$.

$A \times B$, $B \times A$ என்ற கணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் நான்கு உறுப்புகள் உள்ளன. இங்கு, $A \times B = B \times A$.

5–3·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, B = \{1\}$ எனில், அப்பொழுது

$A \times B = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), \ldots\}$,

$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots\}$.

$A \times B$-ம், $B \times A$-ம் முடிவில்லாக் கணங்கள். மேலும் $A \times B \neq B \times A$.

5–3·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6, \ldots\}$ எனில், அப்பொழுது

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), \ldots,$

$(3, 2), (3, 4), (3, 6), \ldots,$

$(5, 2), (5, 4), (5, 6), \ldots\}$,

$B \times A = \{(2, 1, (2), 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5),$

$(6, 1), (6, 2), (6, 5), \ldots\}$.

முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் போலவே, $A \times B$, $B \times A$ என்ற இரண்டும் முடிவில்லாக் கணங்கள்; $A \times B \neq B \times A$.

5–3·8. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, \ldots\}, B = \{1, 3, 5, \ldots\}$ எனில், அப்பொழுது

$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), \ldots,$

$(2, 1), (2, 3), (2, 5), \ldots,$

$(3, 1), (3, 3), (3, 5), \ldots\}$,

$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots,$

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), \ldots,$

$(5, 1), (5, 2), (5, 3), \ldots\}$.

இந்த எடுத்துக்காட்டிலும் $A \times B$-ம், $B \times A$-ம் முடிவில்லாக் கணங்கள்; $A \times B \neq B \times A$.

5–3·9. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ எனில்,

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots,$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), \ldots,$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), \ldots\},$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots,$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), \ldots,$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), \ldots\}.$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் $A \times B$-ம் $B \times A$-ம் முடிவில்லாக் கணங்கள்; ஆனால் $A \times B = B \times A$.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளின் $A \times B$-ன் காரணிகளான A, B என்ற இரண்டையும் வெற்றற்ற (non-empty) கணங்களாக எடுத்திருந்தோம். இனி, $A = \phi \vee B = \phi$ என இருந்தால், $A \times B$ என்ன ஆகும் என்பதை அடுத்துக் காண்போம்.

5–3·10. தேற்றம்

$$A = \phi \vee B = \phi \Longleftrightarrow A \times B = \phi.$$

நிறுவல்

பாகம் 1

$A = \phi \vee B = \phi \Longrightarrow A \times B = \phi$ என நிறுவவேண்டும்.

$A = \phi \vee B = \phi$ (எடுகோள்)

அதாவது, A, B என்ற இரண்டுள் குறைந்தது ஒன்று ϕ ஆகும்.

முடியுமானால், $A \times B \neq \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, $\exists (a, b) \in A \times B$.

எனவே, 5–3·2-ன் படி,

$a \in A \wedge b \in B$ என்பது உண்மை ... (1)

ஆனால் எடுகோளின்படி, A, B என்ற இரண்டுள் குறைந்தது ஒன்று ϕ ஆகும். எனவே, $a \in A$, $b \in B$ என்ற இரு கூற்றுகளுள் குறைந்தது ஒன்று பொய்.

ஆகவே, **1-5·1**-ன் படி,

$a \in A \wedge b \in B$ என்பது பொய். ... (2)

(1), (2) என்பவை ஒன்றுடன் ஒன்று முரண்படுகின்றன.

எனவே, $A \times B \neq \phi$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad A \times B = \phi$

பாகம் 2 :

$A \times B = \phi \implies A = \phi \vee B = \phi$ என நிறுவவேண்டும்.

$A \times B = \phi$ (எடுகோள்)

முடியுமானால், $A \neq \phi \wedge B \neq \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, $\exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B$.

$\therefore \quad (a, b) \in A \times B$ [5-3·2-ன் படி]

ஆனால் $A \times B = \phi$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad (a, b) \in \phi$

இது ஒரு முரண்பாடு.

எனவே, $A \neq \phi \wedge B \neq \phi$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad A = \phi \vee B = \phi.$

5-3·11. கருத்துரைகள்

(a) $A = \phi \vee B = \phi \iff B \times A = \phi$

(b) $A \neq \phi \wedge B \neq \phi \iff A \times B \neq \phi$

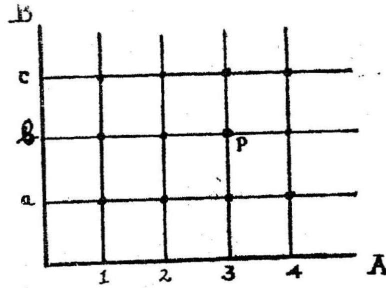
வென் விளக்கப் படத்தின் மூலம் கொடுத்துள்ள கணங்களையும், அவைகளின் கூட்டுகள், இடைவெட்டுகள், வேறுபாடுகள், சமச்சீர் வேறுபாடுகள், நிரப்பிகள் ஆகியவற்றையும் காட்டலாம் என்றும், அவைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளை எளிதில் புரிந்துகொள்ளலாம் என்றும் அறிவோம். இனி, $A \times B$ ஐப் படத்தின் மூலம் காட்டுவது எப்படி எனப் பார்ப்போம்.

5-4· கூறு விளக்கப்படம் (Co-ordinate Diagram)

A, B என்பன எவையேனும் இரு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. இவைகளில் சில உறுப்புகள் மட்டுமே இருந்தால், $A \times B$ ஐ ஒரு விளக்கப் படத்தின் மூலம் காட்டலாம். இதற்கு $A \times B$-ன் கூறு

விளக்கப்படம் (coordinate diagram) என்பது பெயர். இதை எப்படி வரைவது என்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ என்க. அப்பொழுது, $A \times B$-ல் மொத்தம் 12 உறுப்புகள் உள்ளன. படம் 21A, — B-ன் கூறு விளக்கப் படம்.

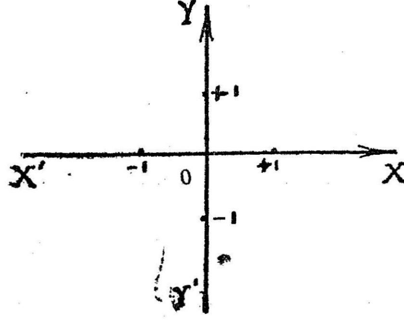


படம் 21

முதலில், ஒரு தளத்தில் கிடைக்கோடு (horizontal line) ஒன்று வரைந்து அதில் A-ன் உறுப்புகளைக் குறிக்கிறோம். இக் கோட்டின் இடது முனைப் புள்ளி (end point) வழியாக ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடு (vertical line) வரைந்து அதில் B-ன் உறுப்புகளைக் குறிக்கிறோம். A-ன் உறுப்புகளிலிருந்து மேல்நோக்கும் நிலைக்குத்துக் கோடுகளும், B-ன் உறுப்புகளிலிருந்து வலம் நோக்கும் கிடைக் கோடுகளும் வரைகிறோம். இந்த நிலைக்குத்துக் கோடுகளும் கிடைக்கோடுகளும் ஒரு பின்னலாக (net work) அமைகின்றன. இதில் மொத்தம் 12 பின்னற் புள்ளிகள் (lattice points) உள்ளன. இவை ஒவ்வொன்றும் $A \times B$-ன் ஓர் உறுப்பைக் குறிப்பதாகக் கொள்கிறோம். ஒரு பின்னற் புள்ளியிலிருந்து நிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கினுல், அது குறிக்கும் உறுப்பின் முதற் கூறும், கிடையாக இடம் (left) நோக்கினுல், இரண்டாம் கூறும் கிடைக்கும். சான்ருக, P என்ற பின்னற் புள்ளி $(3, b)$ ஐக் குறிக்கிறது.

$A = B$ எனில், அப்பொழுது $A \times B = A \times A$. இப் பெருக்கத்தைப் பொதுவாக A^2 என எழுதுகிறோம். மேலும், $A = \mathbb{R}$ எனில், அப்பொழுது $A \times B = \mathbb{R}^2$. இக் கணத்தை முதலில் ஆராய்ந்தவர் தேக்காட்டே (Descartes, 1596—1650] என்ற ஃபிரான்சு நாட்டுக் கணித மேதை. $\mathbb{R}^2$-ன் கூறு விளக்கப்படம் பின் வரையப்பட்டுள்ளது (படம் 22).

இப்படம் கூறுத் தளம் (co-ordinate plane) என்றும், தேக்காட்டே யின் நினைவாகத் தேக்காட்டின் தளம் (Cartesian plane) என்றும்



படம் 22.

அழைக்கப்படுகிறது. இக் காரணத்தினுல்தான் $A \times B$ ஐத் தேக் காட்டின் பெருக்கம் என்கிறோம்.

இதுவரை இரண்டு கணங்களின் பெருக்கங்களைப் பற்றிப் படித் தோம். இனி இரண்டுக்கு மேற்பட்ட கணங்களின் பெருக்கங்களைப் பார்ப்போம்.

5–5. r கணங்களின் தேக்காட்டின் பெருக்கம்

5–5·1. வரையறை

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r$ என்பன r கணங்கள் எனில், அவைகளின் தேக்காட்டின் பெருக்கம் $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$ என்பதை,

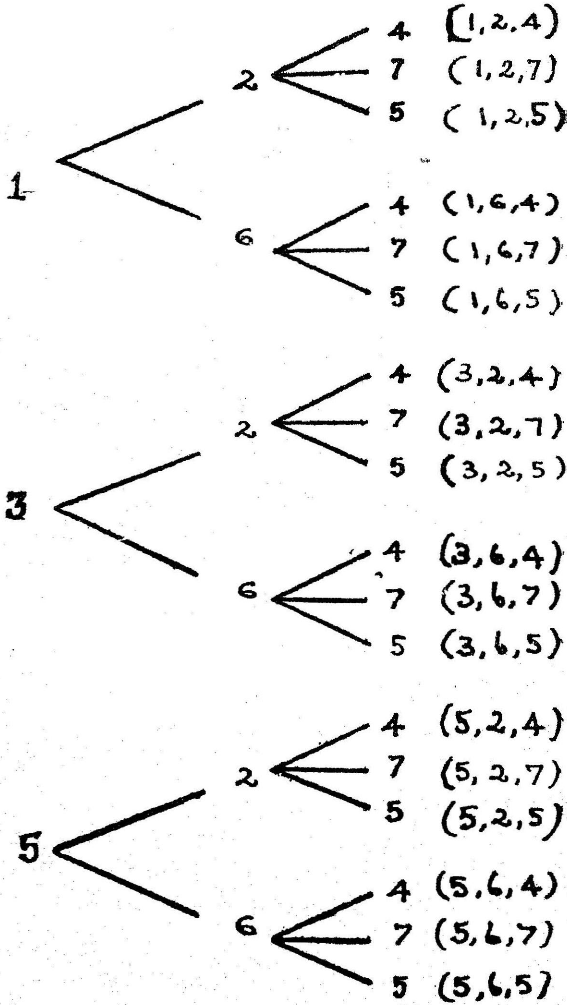
$A_1 \times A_2 \times \ldots A_r = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_r) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, r\}$ என வரையறுக்கிறோம்.

$A_1 = A_2 = \ldots = A_r = A$ எனில், அப்பொழுது $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$ என்பது $A \times A \times \ldots \times A$ (r காரணிகள்) ஆகிறது. இதை A^r எனக் குறிக்கிறோம்.

5–5·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 3, 5 \}$, $B = \{ 2, 6 \}$, $C = \{ 4, 7, 5 \}$ எனில், $A \times B \times C$-ன் உறுப்புகளைப் பின் வரையப்பட்டுள்ள (படம் 23) மர விளக்கப்படத்தின் (tree diagram) மூலம் எளிதாக எழுதலாம்.

$A \times B \times C$-ன்
உறுப்புகள்



படம் 23

5–5·3. எடுத்துக்காட்டு

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. இது முப்பரிமாண வெளியைக் (three dimensional space) குறிக்கிறது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

5-6. மாதிரிக் கணக்குகள்

5-6·1. மாதிரிக் கணக்கு

$(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$ எனில், x, y-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $y - 2 = x - 1$, $2x + 1 = y + 2$ [5-2·2-ன் படி]

அதாவது, $x - y = -1$, $2x - y = 1$.

$\therefore$ $x = 2, y = 3$

5-6·2. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 3, 8\}$, $C = \{3, 4\}$ எனில், $A \times (B \cup C)$, $(A \times B) \cap (A \times C)$, $(A - B) \times C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$A \times (B \cup C) = \{2, 3\} \times \{1, 3, 8, 4\}$$
$$= \{(2, 1), (2, 3), (2, 8), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 8), (3, 4)\}$$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 8), (3, 1), (3, 3), (3, 8)\}$$
$$A \times C = \{(2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$
$$\therefore \quad (A \times B) \cap (A \times C) = \{(2, 3), (3, 3)\}$$
$$(A - B) \times C = \{2\} \times \{3, 4\} = \{(2, 3), (2, 4)\}$$

5-6·3. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{3\}$, $B = \{2, 5\}$, $C = \{1, 4\}$ எனில், $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$, $A \times B \times C$ ஆகியவற்றைக் காண்க. இந்த மூன்று கணங்களிலிருந்து உங்கள் முடிவு (conclusion) என்ன ?

$$A \times (B \times C) = \{3\} \times \{(2, 1), (2, 4), (5, 1), (5, 4)\}$$
$$= \{(3, (2, 1)), (3, (2, 4)), (3, (5, 1)), (3, (5, 4))\}$$

$$(A \times B) \times C = \{(3, 2), (3, 5)\} \times \{1, 4\}$$
$$= \{((3, 2), 1), ((3, 2), 4), ((3, 5), 1), ((3, 5), 4)\}$$

$$A \times B \times C = \{(3, 2, 1), (3, 2, 4), (3, 5, 1), (3, 5, 4)\}$$
$$= \{((3, 2), 1), ((3, 2), 4), ((3, 5), 1), ((3, 5), 4)\}$$ [5–2·4-ன் படி]

$\therefore (A \times B) \times C = A \times B \times C$

$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

எனவே, தேக்காட்டின் பெருக்கலுக்குச்(Cartesian multiplication) சேர்ப்புப் பண்பு கிடையாது.

5–6·4. மாதிரிக் கணக்கு

A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில்,

$A \times B \subset P(P(A \cup B))$ என நிறுவுக.

நிறுவல் :

$[A = \phi \vee B = \phi]$ அல்லது $[A \neq \phi \wedge B \neq \phi]$.

இந்த இரு வகைகளையும் தனித்தனியே பார்ப்போம்.

வகை 1 :

$A = \phi \vee B = \phi$ என்க.

அப்பொழுது $A \times B = \phi$ [5-3·10-ன் படி]

ஆனல், 2–5·9-ன் படி, ϕ எந்தக் கணத்திற்கும் உட்கணமாகும்.

$\therefore A \times B \subset P(P(A \cup B))$

வகை 2 :

$A \neq \phi \wedge B \neq \phi$ என்க.

அப்பொழுது $A \times B \neq \phi$ [5–3·11(b)-ன் படி]

$\therefore \exists (x, y) \in A \times B$

$\therefore x \in A \wedge y \in B$ [5–3·2-ன் படி]

இப்பொழுது, $x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$ [$\because A \subset A \cup B$]

$\therefore \{x\} \subset A \cup B$

$\therefore \{x\} \in P(A \cup B)$ ... (i) [2–7·5-ன் படி]

$x \in A \wedge y \in B$ என நிறுவியுள்ளோம்.

$\therefore \quad x \in A \cup B \wedge y \in A \cup B$

$[\because \quad A \subset A \cup B, \ B \subset A \cup B]$

$\therefore \quad \{x, y\} \subset A \cup B$

$\therefore \quad \{x, y\} \in P(A \cup B) \quad \ldots$ (ii) [2–7·5-ன் படி]

(i), (ii)-லிருந்து, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset P(A \cup B)$

$\therefore \quad \{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(A \cup B))$ [2–7·5-ன் படி]

$\therefore \quad \{x, y\} \in P(P(A \cup B))$ [5–2·1-ன் படி]

இந்த விதமாக, $(x, y) \in A \times B \Longrightarrow (x, y) \in P(P(A \cup B))$

$\therefore \quad A \times B \subset P(P(A \cup B))$ [2–5·5-ன் படி]

பயிற்சி 5 (அ)

1. $(x, 2) = (3, y)$ எனில், x, y-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

2. $(x + y, 1) = (3, x - y)$ எனில், x, y-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. $(x, 2) \neq (x, y)$ என்பதிலிருந்து உங்கள் முடிவு என்ன?

4. $(a, b, c) = (d, e, f) \Longleftrightarrow a = d, \ b = e, \ c = f$ என நிறுவுக.

5. $A = \{3, 9\}, B = \{2, 9, 5\}$ எனில், $A \times B \neq B \times A$ என நிறுவுக.

6. $A \times B, \ B \times A$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

   (a) $A = \{3, 1, 2\}, \ B = \{1, 3, 2\}$

   (b) $A = \phi, \ B = \{2, 6, 5, 10\}$

   (c) $A = \{0\}, B = \{\ \}$

   (d) $A = \{1, 2\}, \ B = \{3, 6, 9, \ldots\}$

7. $A \times B = B \times A$ என இருக்குமாறு A, B என்ற கணங்கள் தருக.

8. $A = \{1, 2\}, B = \{2\}$ எனில், $(A \times B) \cup (B \times A)$, $A \cap (A \times B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. $A = \{3, 4\}, B = \{3\}, C = \{5, 2, 4\}$ எனில்,
$A \times (B \cup C), (A \cap B) \times C, (C - A) \times A,$
$A \times (B \times C), (A \times B) \times C$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, f\}, C = \{d, f, g\}$ எனில், மர விளக்கப்படத்தின் மூலம் $A \times B \times C$ ஐக் காண்க.

11. கீழ் வருபவை ஒவ்வொன்றும் உண்மையா, பொய்யா எனக் கூறுக.

(a) $(3, 25) = (+\sqrt{9}, 5^2)$

(b) $(1, 2, 2) = (1, 2)$

(c) $(1, 5) \neq (5, 1)$

(d) $\{(5, 1)\} = \{(1, 5)\}$

விடைகள்

1. $x = 3, y = 2.$
2. $x = 2, y = 1.$
3. $y \neq 2.$

6. (a) $A \times B = \{(3, 1), (3, 3), (3, 2), (1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 2)\}$
$= B \times A$

(b) $A \times B = \phi = B \times A$

(c) $A \times B = \phi = B \times A$

(d) $A \times B = \{(1, 3), (1, 6), (1, 9), \ldots \ldots, (2, 3), (2, 6), (2, 9), \ldots \ldots\}$

$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (6, 1), (6, 2), (9, 1), (9, 2) \ldots \ldots\}$

7. $A = B = \{1\}$

8. $(A \times B) \cup (B \times A) = \{(1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$
$A \cap (A \times B) = \phi$

9. $A \times (B \cup C) = \{(3, 3), (3, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (4, 2), (4, 4)\}$

$$(A \cap B) \times C = \{(3, 5), (3, 2), (3, 4)\}$$
$$(C - A) \times A = \{(5, 3), (5, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$
$$A \times (B \times C) = \{(3, (3, 5)), (3, (3, 2)), (3, (3, 4)), (4, (3, 5)), (4, (3, 2)), (4, (3, 4))\}$$
$$(A \times B) \times C = \{((3, 3), 5), ((3, 3), 2), ((3, 3), 4), ((4, 3), 5), ((4, 3), 2), ((4, 3), 4)\}$$

11. (a) உ (b) பொ (c) உ (d) பொ

5–7. தேக்காட்டின் பெருக்கலின் பண்புகள் (Properties of Cartesian Multiplication)

5–6·3-ல் தேக்காட்டின் பெருக்கலுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு கிடையாது எனப் பார்த்தோம். 5–3·4-ல் தேக்காட்டின் பெருக்கலுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு கிடையாது என நிறுவினோம். ஆனால் 5–3·10, 5–3·11 (a) ஆகியவற்றின் படி,

$A = \phi \vee B = \phi \Longleftrightarrow A \times B = B \times A = \phi$ என அறிவோம். அடுத்து, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ என இருக்கும்பொழுது, $A \times B = B \times A$ என இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை என்ன என்று பார்ப்போம்.

5–7·1. தேற்றம்

A, B என்பன எவையேனும் இரு வெற்றற்ற கணங்கள் (non-empty sets) எனில், அப்பொழுது

$$A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = B$$

நிறுவல்

பாகம் 1

$A \times B = B \times A \Longrightarrow A = B$ என நிறுவவேண்டும்.

$A \times B = B \times A,\ A \neq \phi,\ B \neq \phi$ (எடுகோள்)

$A \neq \phi \wedge B \neq \phi \Longrightarrow \exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B.$

இப்பொழுது,

$a \in A \wedge b \in B \Longleftrightarrow (a, b) \in A \times B$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (a, b) \in B \times A$ [எடுகோள் படி]

$\Longleftrightarrow a \in B \wedge b \in A$ [5–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad a \in A \Longleftrightarrow a \in B$

$\therefore \quad A = B.$

பாகம் 2 :

$A = B \Longrightarrow A \times B = B \times A$ என நிறுவவேண்டும்.

$A = B$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad A \times B = B \times A$

அடுத்து, தேக்காட்டின் பெருக்கல் சம்பந்தப்பட்ட பங்கீட்டு விதிகளைப் பார்ப்போம்.

5–7·2. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது,

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

நிறுவல் :

(a) $(x, y) \in A \times (B \cup C)$

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$ [3–2·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$ [1–10·19(a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee (x, y) \in A \times C$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in A \times B \cup A \times C$ [3–2·2-ன் படி]

$\therefore \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ [2–3·2-ன் படி]

(b)-ன் நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

5–7·3. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

நிறுவல் :

(a) $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C)$
[1–10·11(a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$
[1–10·12(a) மற்றும் 1–10·18(a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C$
[5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(b)-ன் நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

5–7·4. தேற்றம்

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

(a) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

(b) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

நிறுவல் :

(a) $(x, y) \in A \times (B - C)$

$\Longrightarrow x \in A \wedge y \in (B - C)$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$
[1–10·11(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C)$
[1–10·12(a) மற்றும் 1–10·18(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C$
[5–3·2 மற்றும் 5–3·3-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in [(A \times B) - (A \times C)]$ [3–4·2-ன் படி]

$\therefore \quad A \times (B - C) \subset [(A \times B) - (A \times C)] \quad \ldots (1)$
[2–5·2-ன் படி]

$(x, y) \in [(A \times B) - (A \times C)]$

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin A \vee y \notin C$
[5–3·2 மற்றும் 5–3·3-ன் படி]

$\Longrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge y \notin C)$
[$\because$ $x \in A \wedge x \notin A$ என இருக்க முடியாது]

$\Longrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)$ [1–10 18 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \wedge y \in (B - C)$ [3–4·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times (B - C)$ [5–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad [(A \times B) - (A \times C)] \subset A \times (B - C) \quad \ldots (2)$
[2–5·2-ன் படி]

எனவே, (1), (2)-லிருந்து, 2–5·11-ன் படி,

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

(b)-ன் நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

5–7·5. தேற்றம்

A, B, C, D என்பன எவையேனும் நான்கு கணங்கள் எனில் அப்பொழுது

(a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$

(b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

நிறுவல் :

(a) $(x, y) \in [(A \times B) \cap (C \times D)]$

$\Longleftrightarrow (x, y) \in A \times B \quad \wedge \quad (x, y) \in C \times D$
[3–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D)$
[5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in D) \wedge (x \in C \wedge y \in B)$
[1–10·12 (a) மற்றும் 1–10·18 (a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in A \times D \quad \wedge \quad (x, y) \in C \times B$
[5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in [(A \times D) \cap (C \times B)]$ [3–3·2-ன் படி]

$$\therefore \quad (A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$$

[2–3·2-ன் படி]

(b)-ன் நிறுவலைப் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடுகிறோம்.

5–8. தேக்காட்டின் பெருக்கத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

நாம் இதுவரை நிறுவிய தேக்காட்டின் பெருக்கலின் பண்புகளில், கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைகள் சம்பந்தப்படவில்லை. A, B என்பன இரு முடிவுள்ள கணங்கள் எனில்,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ என அறிவோம். இதேபோல், $A_1, A_2, \ldots A_r$ என்ற முடிவுள்ள கணங்கள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை தெரிந்தால், $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$ என்ற பெருக்கத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண முடியுமா என்ற வினு எழும். இது முடியும் என்றும், இதற்கு எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கோட்பாடு துணை செய்யும் என்றும் காண்போம். முதலில் இக் கோட்பாட்டைக் காண்போம்.

5–8·1. எண்ணுதலின் அடிப்படைக் கோட்பாடு (Fundamental Principle of Counting)

ஒரு வேலையை n_1 வெவ்வேறான வழிகளிலும், இரண்டாம் வேலையை n_2 வெவ்வேறான வழிகளிலும், மூன்றும் வேலையை n_3 வெவ்வேறான வழிகளிலும், இதேபோன்று கடைசி வேலையான r ஆவது வேலையை n_r வெவ்வேறான வழிகளிலும் செய்து முடிக்க முடியுமானுல், அப்பொழுது மொத்த வேலையை $n_1 n_2 n_3 \ldots n_r$ வெவ்வேறான வழிகளில் செய்து முடிக்க முடியும்.

5–8·2. தேற்றம்

$A_1, A_2, \ldots, A_r$ என்பன r முடிவுள்ள கணங்கள் எனில், அப்பொழுது

$$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r) = n(A_1) \cdot n(A_2) \ldots n(A_r).$$

நிறுவல் :

$a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_r \in A_r$ என இருக்குமாறு $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ என்ற r-மைகள் (r-tuples) எத்தனை உள்ளனவோ அத்தனை உறுப்புகள் $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$-ல் உள்ளன. A_1-லிருந்து a_1ஐ $n(A_1)$ வெவ்வேறான வழிகளில் எடுக்க முடியும். பின்பு A_2-லிருந்து a_2ஐ $n(A_2)$ வெவ்வேறான வழிகளில் எடுக்க முடியும். இந்த வித

மாகக் கடைசிப் பொருளான a_r-க்கு வரும்வரை தொடர்ந்து செய்கிறோம். A_r-லிருந்து a_r ஐ $n(A_r)$ வெவ்வேறான வழிகளில் எடுக்க முடியும்.

எனவே, 5–8·1-ன் படி,

$$r\text{-மைகளின் எண்ணிக்கை} = n(A_1) \cdot n(A_2) \ldots n(A_r).$$

$$\therefore \quad n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r) = n(A_1) \cdot n(A_2) \ldots n(A_r).$$

5–9. மாதிரிக் கணக்குகள்

5–9·1. மாதிரிக் கணக்கு

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A \times B) \cap (A' \times C) = \phi$ என நிறுவுக.

A, B, C என்ற மூன்றுள் குறைந்தது ஒன்று வெற்றுக் கணமாக இருக்கும்; அல்லது மூன்றும் வெற்றற்ற கணங்களாக இருக்கும். இந்த இரு வகைகளையும் ஒவ்வொன்றாகப் பார்ப்போம்.

வகை 1 :

A, B, C என்ற மூன்றுள் குறைந்தது ஒன்று வெற்றுக் கணமாக இருக்கட்டும். அப்பொழுது

$$A \times B = \phi \vee A' \times C = \phi \qquad [5\text{–}3\cdot10\text{-ன் படி}]$$

$$\therefore \quad (A \times B) \cap (A' \times C) = \phi \qquad [4\text{–}2\cdot5\ (b)\text{-ன் படி}]$$

வகை 2 :

A, B, C என்ற மூன்றும் வெற்றற்ற கணங்களாக இருக்கட்டும். அப்பொழுது அவை ஒவ்வொன்றிலும் குறைந்தது ஓர் உறுப்பாகிலும் உண்டு.

இப்பொழுது,

$$(x, y) \in A \times B \Longrightarrow x \in A \wedge y \in B \qquad [5\text{–}3\cdot2\text{-ன் படி}]$$

$$\Longrightarrow x \notin A' \wedge y \in B \qquad [3\text{–}5\cdot3\text{-ன் படி}]$$

$$\Longrightarrow (x, y) \notin A' \times C \qquad [5\text{–}3\ 3\text{-ன் படி}]$$

$$\therefore \quad (A \times B) \cap (A' \times C) = \phi \qquad [3\text{–}3\cdot11\text{-ன் படி}]$$

5–9·2. மாதிரிக் கணக்கு

U முழுமைக் கணம், *A, B* என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில்,

$(A \times U) \cap (A \times B) = A \times B$ என நிறுவுக.

$[A = \phi \vee B = \phi]$ என இருக்கும் அல்லது $[A \neq \phi \wedge B \neq \phi]$ என இருக்கும். இந்த இரண்டு வகைகளையும் ஒவ்வொன்றாகப் பார்ப்போம்.

வகை 1 :

$A = \phi \vee B = \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, 5–3·10-ன் படி, $A \times B = \phi$ ... (i)

$\therefore \quad (A \times U) \cap (A \times B) = (A \times U) \cap \phi$

$= \phi$ [4–2·5(b)-ன் படி]

$= A \times B$ [(i)-ன் படி]

வகை 2 :

$A \neq \phi \wedge B \neq \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது $A \times B \neq \phi$ [5–3 11(b)-ன் படி]

$\therefore \quad \exists\, (x, y) \in A \times B$

இப்பொழுது,

$(x, y) \in A \times B \Longrightarrow x \in A \wedge y \in B$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in A \wedge y \in U$ [$\because \; B \subset U$]

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times U$ [5–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad A \times B \subset A \times U$ [2–5·2-ன் படி]

$\therefore \quad (A \times B) \cap (A \times U) = A \times B$ [4–2·3(b)-ன் படி]

$\therefore \quad (A \times U) \cap (A \times B) = A \times B$ [4–2·1(b)-ன் படி]

5–9·3. மாதிரிக் கணக்கு

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,

$(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$ என நிறுவுக.

$[(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$

$= [(A \times B) - (C \times B)] \cup [(A \times B) - (A \times C)]$

[5–7·4-ன் படி]

$= (A \times B) - [(C \times B) \cap (A \times C)]$ [4-2·23(b)-ன் படி]

$= (A \times B) - [(C \times C) \cap (A \times B)]$ [5-7·5(a)-ன் படி]

$= (A \times B) - [(A \times B) \cap (C \times C)]$ [4-2·1(b)-ன் படி]

$= (A \times B) - (C \times C)$ [4-2·21(a)-ன் படி]

5-9·4. மாதிரிக் கணக்கு

A, C என்பன இரு வெற்றற்ற கணங்கள் எனில்,

$A \subset B \wedge C \subset D \iff (A \times C) \subset (B \times D)$ என நிறுவுக.

பாகம் 1 :

$A \subset B \wedge C \subset D \Longrightarrow A \times C \subset B \times D$ என நிறுவவேண்டும்.

$A \neq \phi \wedge C \neq \phi$ (எடுகோள்)

$\therefore \; A \times C \neq \phi$ [5-3·11(b)-ன் படி]

$\therefore \; \exists\, (x, y) \in A \times C.$

இப்பொழுது,

$(x, y) \in A \times C \Longrightarrow x \in A \wedge y \in C$ [5-3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in B \wedge y \in D$

[∵ எடுகோள் படி $A \subset B$, $C \subset D$]

$\Longrightarrow (x, y) \in B \times D$ [5-3·2-ன் படி]

$\therefore \; A \times C \subset B \times D$ [2-5·2-ன் படி]

பாகம் 2 :

$A \times C \subset B \times D \Longrightarrow A \subset B \wedge C \subset D$ என நிறுவ வேண்டும்.

$A \neq \phi \wedge C \neq \phi$ (எடுகோள்)

$\therefore \; \exists\, x \in A \wedge \exists\, y \in C$

$\therefore \; (x, y) \in A \times C$ [5-3·2-ன் படி]

ஆனல் $A \times C \subset B \times D$ (எடுகோள்)

$\therefore \; (x, y) \in A \times C \Longrightarrow (x, y) \in B \times D$ [2-5·2-ன் படி]

$\therefore \; x \in A \wedge y \in C \Longrightarrow x \in B \wedge y \in D$ [5-3·2-ன் படி]

$\therefore \; x \in A \Longrightarrow x \in B \wedge y \in C \Longrightarrow y \in D$

$\therefore \; A \subset B \wedge C \subset D.$ [2-5·2-ன் படி]

5–9·5. மாதிரிக் கணக்கு

$B \subset A$ எனில், $B \times B = (B \times A) \cap (A \times B)$ என நிறுவுக.
(மதுரைப் பல்கலைக் கழகம், பி. எஸ்ஸி., ஏப்ரல் 1973)

$B = \phi$ அல்லது $B \neq \phi$ என்பதற்கிணங்க இரு வகைகளையும் தனித்தனியே பார்ப்போம்.

வகை 1 :

$B = \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, $B \times B = \phi$, $B \times A = \phi$, $A \times B = \phi$ [5–3·10-ன் படி]

$\therefore \ (B \times A) \cap (A \times B) = \phi$ [4–2·5(b)-ன் படி]

$\therefore \ B \times B = (B \times A) \cap (A \times B)$

வகை 2 :

$B \neq \phi$ என இருக்கட்டும்.

$B \subset A$ (எடுகோள்)

$\therefore \ B \cap A = B$ [4–2·3(b)-ன் படி]

$\therefore \ A \cap B = B \quad \ldots \text{(i)}$ [4–2·1(b)-ன் படி]

$B \neq \phi$ (தற்கோள்)

$\therefore \ B \times B \neq \phi$ [5–3·11(b)-ன் படி]

$\therefore \ \exists (x, y) \in B \times B$

இப்பொழுது,

$(x, y) \in B \times B$

$\Longleftrightarrow x \in B \wedge y \in B$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B$ [(i)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in A \wedge y \in B)$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in B \wedge y \in A) \wedge (x \in A \wedge y \in B)$
[1–10·12 (a), மற்றும் 1–10·18 (a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in B \times A \wedge (x, y) \in A \times B$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in (B \times A) \cap (A \times B)$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore \ B \times B = (B \times A) \cap (A \times B)$ [2–3·2-ன் படி]

5–9·6. மாதிரிக் கணக்கு

$A \subset C \wedge B \subset D \Longrightarrow (A \times D) \cap (C \times B) = A \times B$ என நிறுவுக.

$[A = \phi \vee B = \phi]$ என இருக்கும் அல்லது $[A \neq \phi \wedge B \neq \phi]$ என இருக்கும். இந்த இருவகைகளையும் தனித்தனியே பார்ப்போம்.

வகை 1 :

$A = \phi \vee B = \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது, 5–3·10-ன் படி, $A \times B = \phi$ ... (i)

மேலும், $A \times D = \phi \vee C \times B = \phi$

எனவே, 4–2·5 (b)-ன் படி,

$(A \times D) \cap (C \times B) = \phi$ ... (ii)

(i), (ii)-லிருந்து, $(A \times D) \cap (C \times B) = A \times B$

வகை 2:

$A \neq \phi \wedge B \neq \phi$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது $A \times B \neq \phi$ [5-3·11(b)-ன் படி]

$\therefore \quad \exists (x, y) \in A \times B$

இப்பொழுது,

$(x, y) \in A \times B$

$\Longleftrightarrow x \in A \wedge y \in B$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D$ [∵ எடுகோள் படி $A \subset C \wedge B \subset D$]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D)$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x \in A \wedge y \in D) \wedge (x \in C \wedge y \in B)$ [1–10·12(a), மற்றும் 1–10·18(a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in A \times D \wedge (x, y) \in C \times B$ [5–3·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in (A \times D) \cap (C \times B)$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore (A \times D) \cap (C \times B) = A \times B$ [2–3·2-ன் படி]

5–9·7. மாதிரிக் கணக்கு

$A \subset C \wedge B \subset D$ எனில்,

$(C \times D) - (A \times B) = [(C - A) \times D] \cup [C \times (D - B)]$ என நிறுவுக.

$[C - A) \times D] \cup [C \times (D - B)]$

$= [(C \times D) - (A \times D)] \cup [(C \times D) - (C \times B)]$ [5–7·4-ன் படி]

$= (C \times D) - [(A \times D) \cap (C \times B)]$ [4–2·23(b)-ன் படி]

$= (C \times D) - (A \times B)$ [5–9·6-ன் படி]

5–9·8. மாதிரிக் கணக்கு

A, B என்ற இரு கணங்களில் n பொதுவான உறுப்புகள் இருந்தால், $A \times B$, $B \times A$ என்ற இரு கணங்களில் எத்தனை பொதுவான உறுப்புகள் உள்ளன?

$A \cap B = C$ என்க.

எடுகோள் படி, $A \cap B$-ல் n உறுப்புகள் உள்ளன.

$\therefore$ C-ல் n உறுப்புகள் உள்ளன.

$\therefore$ $C \times C$-ல் n^2 உறுப்புகள் உள்ளன. [5–8·2-ன் படி]

ஆனால், 5–7·5(b)-ன் படி,

$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$

$= C \times C$ [தற்கோள் படி]

$\therefore$ $(A \times B) \cap (B \times A)$-ல் n^2 உறுப்புகள் உள்ளன.

அதாவது, $A \times B$, $B \times A$ என்ற இரு கணங்களில் n^2 பொது உறுப்புகள் உள்ளன.

பயிற்சி 5 (ஆ)

1. A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A \times A) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$ என நிறுவுக.

2. A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A \times A) - (B \times C) = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - C)]$ என நிறுவுக.

3. A, B, C, D என்பன எவையேனும் நான்கு வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், $A = C \wedge B = D \Longleftrightarrow A \times B = C \times D$ என நிறுவுக.

4. A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(B \times A) \cap (C \times A') = \phi$ என நிறுவுக.

5. $A = B$ எனில், $A \times B = B \times A$ என நிறுவுக.
இதன் மறுதலை உண்மையா?

6. $A \subset C$, $B \subset D$ எனில், $A \times B \subset C \times D$ என நிறுவுக.
இதன் மறுதலை உண்மையா?

7. U முழுமைக் கணம், A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில்,
(a) $(A \times U) \cap (U \times B) = A \times B$
(b) $(A \times U) \cap (A' \times B) = \phi$ என நிறுவுக.

8. A B, C என்பவை மூன்று கணங்கள், $A \subset B$ எனில், $A \times C \subset B \times C$ என நிறுவுக.
(ஆக்ரா ப.க. 1971)

9. A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில், $n(A \cap B) = 1 \Longleftrightarrow n[(A \times B) \cap (B \times A)] = 1$ என நிறுவுக.

10. A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A - B) \times C = (A \times C) - (B - C)$ என நிறுவுக. இதைப் பயன்படுத்தி, $\phi \times A = \phi$ என நிறுவுக.

11. A, B, C, D என்பன எவையேனும் நான்கு கணங்கள் எனில், $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ என நிறுவுக. இதைப் பயன்படுத்தி,
(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ என நிறுவுக.

12. A, B, C, D என்பன எவையேனும் நான்கு கணங்கள் எனில், $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ என நிறுவுக.

13. ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம், $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ என இருக்க வேண்டியதில்லை என நிறுவுக.

14. A, B, C என்ற கணங்கள் $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$ என இருந்தால், $A = B = C$ என நிறுவுக.

15. $A = B \cap C$ எனில், $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ என நிறுவுக.

16. $A = \{h, t\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ எனில், $n(A \times A \times B)$, $n(A \times B \times B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

17. கணம் A-ல் m உறுப்புகள் இருந்தால், கீழ்க்காணும் கணங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன?

(a) $A \times A$

(b) $\{(x, y) \mid x \in A,\ y \in A,\ x \neq y\}$;

(c) $A \times A \times A$

(d) $\{(x, y, z) \mid x \in A,\ y \in A,\ z \in A,\ x \neq y,\ x \neq z,\ y \neq z\}$

18. A, B என்பன இரு வெற்றற்ற கணங்கள். $A \times B$, $B \times A$ என்ற இரு கணங்களில் m பொது உறுப்புகள் இருந்தால், A, B என்ற இரண்டிலும் எத்தனை பொது உறுப்புகள் உள்ளன ?

விடைகள்

5. மறுதலை பொய். ஆனால் $A \times B \neq \phi$ எனில், அதாவது $A \neq \phi \wedge B \neq \phi$ எனில், அப்பொழுது மறுதலை உண்மை.

6. மறுதலை பொய். ஆனால் $[A = \phi \wedge B = \phi]$ அல்லது $[A \neq \phi \wedge B \neq \phi]$ எனில், அப்பொழுது மறுதலை உண்மை.

16. $n(A \times A \times B) = 24$

$n(A \times B \times B) = 72$

17. (a) m^2

(b) $m^2 - m$

(c) m^3

(d) $m^3 - m$

18. $\sqrt{m}$

6. தொடர்புகள்

(Relations)

6·1. முன்னுரை

அன்றாட வாழ்க்கையிலும் கணிதத்திலும் நாம் அடிக்கடி தொடர்புகள் பற்றிப் பேசுகிறோம். தொடர்புகள் இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட பொருள்களுக்கிடையே இருக்கலாம். நாம் நன்கு அறிந்துள்ள தொடர்புகள் சிலவற்றைப் பார்ப்போம்.

திருக்குறளை எழுதியவர் திருவள்ளுவர். இராமனின் தந்தை தயரதன். இளங்கோ அடிகளின் அண்ணன் செங்குட்டுவன். கோவலன் மனைவி கண்ணகி. வேங்கடத்தை விட உயர்ந்தது இமயம். இந்தியாவின் தலைநகர் புது தில்லி. $8 < 11$. 6-ன் ஒரு காரணி 3. அ $\in$ { அ, இ, உ }, { அ } $\subset$ { அ, இ, உ }. $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$. 4-ன் மூன்றாம் அடுக்கு (power) 64. x அச்சு $\perp$ y அச்சு. இந்திரா காந்தியின் பெற்றோர்கள் ஜவகரும் கமலாவும். 15 உடன் 20ஐக் கூட்டினால் கிடைப்பது 35.

தொடர்புகளை எழுத்துகளால் குறிப்போமானால் அவைகளைப் பற்றிப் பேசுவதற்கு ஏதுவாக இருக்கும். மனைவி என்ற தொடர்பை 'ம' என்ற எழுத்தால் குறிப்போமானால்,

'கோவலன் மனைவி கண்ணகி' என்பதை
(கோவலன்) ம (கண்ணகி) என எழுதலாம்.

இதே போன்று,

(காந்தி) ம (கஸ்தூரிபாய்),
(ஜவகர்) ம (கமலா),
(இராவணன்) ம (மண்டோதரி),
(இராமன்) ம (சீதை),
(நளன்) ம (தமயந்தி).

மூன்று அல்லது மூன்றுக்கு மேற்பட்ட பொருள்களுக்கு இடையே உள்ள ஒரு தொடர்பு பற்றிப் பேசும்பொழுது, முதலில்

அத் தொடர்பைக் குறிக்கும் எழுத்தை எழுதிப் பின்பு எப் பொருள்களுக்கு இடையே அத் தொடர்பு உள்ளதோ அவற்றின் பெயர்களை முறையான வரிசையில் எழுதுவது நலமாக இருக்கும். சான்றாக, 'பெ' என்ற எழுத்து பெற்றோரைக் குறிக்குமானால்,

'மணிமேகலையின் பெற்றோர் கோவலனும் மாதவியும்,' என்பதை,

பெ (மணிமேகலை, கோவலன், மாதவி) என எழுதலாம். இதே போன்று,

பெ {இந்திரா காந்தி, ஜவகர், கமலா},

பெ {இராமன், தயரதன், கோசலை}.

அன்றாட வாழ்க்கையில் தொடர்புகள் பற்றிப் பேசும் பொழுது, சில பொருள்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று ஒரு தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்று சொன்னால், அவைகளுக்கு இடையே உள்ள இணைப்பை (connection) விவரிக்க ஏதேனுமொரு உள்ளுணர் வழி (intuitive way) இருக்கவெண்டுமென வற்புறுத்து கிறோம். இணைந்த தன்மை (connectedness) பற்றிய இந்த உள்ளுணர்வுக் கருத்திற்குக் குறிப்பிட்ட தொடர்புகளில் தெளி வான பொருள் இருக்கலாம்; இருப்பினும், பொதுவாக, இக் கருத்து தெளிவற்றது. சான்றாக, வேங்கடம், இமயம் என்ற இரண்டும் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்று சொன்னால், உடனே 'விட உயர்ந்தது' என்ற தொடர்பால் அவை இணைந் துள்ளன என உள்ளுணர்வு கூறுகிறது. க, சூரியன் என்ற இரண்டும் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்று கூறினால், அவைகள் இணைந்த தன்மைக்கு உள்ளுணர்வு விளக்கம் எளிதில் கிடைப் பதில்லை. அமாவாசை, அப்துல் காதர் என்ற இரண்டும் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்று சொன்னால், அவை இரண் டிற்கும் தொடர்பே இருக்க முடியாது என உள்ளுணர்வு கூறு கிறது. எனவே, தொடர்புகள் பற்றிப் பேசும்பொழுது, உள்ளுணர்வை (intuition) வழிகாட்டியாகக் கொள்ள முடியாது. இதிலிருந்து எப் பொருள்கள் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்று கூறினால் மட்டும் போதும் என்றும், அத் தொடர்பிற்கு உள் ளுணர்வு விளக்கம் தேவையில்லை என்றும் உணர்கிறோம்.

ஏற்கெனவே கூறியது போல், தொடர்புகள் இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட பொருள்களுக்கு இடையே இருக்கலாம். தொடர்பு கொண்டுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை தொடர்பை வரையறுக்க எப்படித் துணை செய்கிறது எனப் பார்ப்போம்.

6–2. n-பொருள் தொடர்பு (n-ary Relation)

6–2·1. வரையறை

வரிசையிட்ட n-மைகளை [ordered n-tuples] மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட எந்த ஒரு கணத்தையும் ஒரு n-பொருள் தொடர்பு (n-ary relation) என்கிறோம்.

$n = 2$ ஆக இருக்கும்பொழுது, n-பொருள் தொடர்பை இருபொருள் தொடர்பு (binary relation) என்கிறோம்.

$n = 3$ ஆக இருக்கும்பொழுது, n-பொருள் தொடர்பை முப்பொருள் தொடர்பு (ternary relation) என்கிறோம்.

கீழ்வருபவை இரு பொருள் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

6–2·2. எடுத்துக்காட்டு

{ (கோவலன், கண்ணகி), (காந்தி, கஸ்தூரி பாய் }

6–2·3. எடுத்துக்காட்டு

{(செங்குட்டுவன், இளங்கோ), (இராவணன், கும்பகருணன்), (தருமன், வீமன்)}

6–2·4. எடுத்துக்காட்டு

{ (திருக்குறள், திருவள்ளுவர்), (சிலம்பு, இளங்கோ), (திருமந்திரம், திருமூலர்), (கீதாஞ்சலி, தாகூர்), (திரு அருட்பா, இராமலிங்க அடிகள்) }

6–2·5. எடுத்துக்காட்டு

{ (1, 2), (1, 3), (1, 4) (2, 3), (2, 4), (3, 4) }

6–2·6. எடுத்துக்காட்டு

{ (ϕ, சூரியன்), (குறுந்தொகை, 3). (வைகை, நெப்போலியன்), (மார்கழி, இந்தியா) }

கீழ்வருபவை முப்பொருள் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

6–2·7. எடுத்துக்காட்டு

{ (மணிமேகலை, கோவலன், மாதவி), (இந்திரா காந்தி, ஜவகர், கமலா) }

6–2·8. எடுத்துக்காட்டு

$\{(3, 5, 8), (4, 11, 15), (9, 8, 17), (6, 14, 20)\}$

6–2·9. எடுத்துக்காட்டு

$\{(2, 3, 6), (4, 8, 8), (5, 5, 5)\}$

தொடர்பு என்பது ஒரு கணமாக இருப்பதால், சில பொருள்கள் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பால் இணைந்துள்ளன என்பதைக் குறிக்க, '$\in$' என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்தலாம். சான்றாக,

'கோவலன் மனைவி கண்ணகி' என்பதை

(கோவலன்) ம (கண்ணகி) என எழுதுவதற்குப் பதிலாக,

(கோவலன், கண்ணகி) $\in$ ம என எழுதலாம்.

இனிமேல் நம் கவனமெல்லாம் இரு பொருள் தொடர்பு மீதே இருக்கும். ஒவ்வொரு வரிசையிட்ட இரட்டையும் (ordered pair) ஏதோவொரு தேக்காட்டின் பெருக்கத்தில் (cartesian product) உறுப்பாக இருப்பதால், ஓர் இரு பொருள் தொடர்பைக் கீழ்க்காணுமாறும் வரையறுக்கலாம்.

6·3 இருபொருள் தொடர்பு (Binary Relation)

6–3·1. வரையறை

A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது $A \times B$-ன் ஒவ்வோர் உட்கணமும், A-விருந்து B-க்கு ஓர் இரு-பொருள் தொடர்பு எனப்படும்.

பொதுவாக, ஒரு தொடர்பை R என்ற எழுத்தால் குறிக்கிறோம். R என்பது கணம் A-விருந்து கணம் B-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது

$$R \subset A \times B.$$

$(x, y) \in R$ எனில், அப்பொழுது x ஆனது y-யுடன் R-தொடர்பு கொண்டுள்ளது என்கிறோம்; இதை $x R y$ என எழுதுகிறோம். இந்த விதமாக,

6–3·2. $(x, y) \in R \Longleftrightarrow x R y$

$(x, y) \notin R$ எனில், அப்பொழுது x ஆனது y-யுடன் R-தொடர்பு கொள்ளவில்லை என்கிறோம்; இதை $x \not R y$ என எழுதுகிறோம். இந்த விதமாக,

6–3·3. $(x, y) \notin R \Longleftrightarrow x \not R\, y$.

6–3·4. வரையறை

R என்பது கணம் A-லிருந்து கணம் A-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில், அதாவது, $R \subset A \times A$ எனில், அப்பொழுது R ஐ A-ல் ஓர் இரு-பொருள் தொடர்பு என்கிறோம்.

கீழ் வருபவை இரு-பொருள் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

6–3·5. எடுத்துக்காட்டு

A = { திருவள்ளுவர், கோவலன், இராமன், நளன் },

B = {சீதை, மணிமேகலை, கஸ்தூரிபாய், தமயந்தி, கண்ணகி},

R = { (கோவலன், கண்ணகி), (இராமன், சீதை), (நளன், தமயந்தி) }

எனில், அப்பொழுது R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. இங்கு R என்பது 'மனைவி' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கிறது.

6–3·6. எடுத்துக்காட்டு

A = { திருக்குறள், சிலம்பு, எரிமலை, கரித்துண்டு, சீவக சிந்தாமணி, திருவாசகம் },

B = { கம்பர், பாரதிதாசன், வரதராசனுர். திருத்தக்க தேவர், இளங்கோ }

R = { (சிலம்பு, இளங்கோ), (சீவக சிந்தாமணி, திருத்தக்க தேவர்), (கரித்துண்டு, வரதராசனுர்) } எனில்,

அப்பொழுது R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. இங்கு R என்பது 'எழுதியவர்' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கிறது.

6–3·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 2, 5, 9, 8 \}$, $B = \{ 7, 4, 11 \}$,

$R = \{ (5, 4), (9, 7), (9, 4), (8, 7), (8, 4) \}$ எனில், அப்பொழுது R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. இங்கு R என்பது $>$ என்ற தொடர்பைக் குறிக்கிறது.

6–3·8. எடுத்துக்காட்டு

A = { தருமன், வீமன், விசயன், நகுலன் },

R = { (தருமன், வீமன்), (தருமன், விசயன்),
(தருமன், நகுலன்), (வீமன், விசயன்),
(வீமன், நகுலன்), (விசயன், நகுலன்) }

எனில், அப்பொழுது R என்பது A-ல் ஒரு தொடர்பு. இங்கு R என்பது 'தம்பி' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கிறது.

6–3·9. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2, 3, 6\}$, $R = \{(2, 2), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (6, 6)\}$ எனில், அப்பொழுது R என்பது A-ல் ஒரு தொடர்பு. இங்கு R என்பது 'வகுக்கிறது' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கிறது. 'வகுக்கிறது' என்ற தொடர்பை '|' எனக் குறிப்பது வழக்கம். எனவே, $2 \mid 2$, $2 \mid 6$, $3 \mid 3$, $3 \mid 6$, $6 \mid 6$.

அடுத்து Z-ல் ஒரு முக்கியத் தொடர்பைப் பார்ப்போம்.

6–3·10. ஒருங்கிசைவு மட்டு m (Congruence modulo m)

m என்பது 1 ஐ விடப் பெரிய ஒரு முழு எண் என்க. Z-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \Longleftrightarrow x - y$ ஆனது m ஆல் வகுபடுகிறது என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது R ஐ 'ஒருங்கிசைவு மட்டு m' என அழைக்கிறோம். $x R y$ என்பதை $x \equiv y$ (மட்டு m) என எழுதுகிறோம். இதை x ஒருங்கிசைவு y (மட்டு m) எனப் படிக்கிறோம். எனவே,

$x \equiv y$ (மட்டு m)

$\Longleftrightarrow x - y$ ஆனது m ஆல் வகுபடுகிறது.

$\Longleftrightarrow m \mid (x - y)$

$\Longleftrightarrow x - y = Km, \quad K \in Z$;

$m = 5$ எனக் கொண்டால்,

$7 \equiv 7$ (மட்டு 5),

$23 \equiv 8$ (மட்டு 5),

$11 \equiv (-14)$ (மட்டு 5),

$-4 \equiv 26$ (மட்டு 5),

$-12 \equiv (-47)$ (மட்டு 5).

6–4. வெற்றுத் தொடர்பும் முழுமைத் தொடர்பும் (Empty Relation and Universal Relation)

6–4·1. வரையறை

A, B என்பன இரு கணங்கள் எனில், அப்பொழுது $A \times B$-ன் ஒவ்வோர் உட்கணமும் A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பாகும். ϕ-ம், $A \times B$-ம் $A \times B$-ன் சிறப்பான உட்கணங்கள். எனவே, ϕ-ம், $A \times B$-ம் இரு சிறப்புத் தொடர்புகள். $A \times B$ ஐ முழுமைத் தொடர்பு (universal relation) என்கிறோம். ϕ-ல் உறுப்பே இல்லாததால், ϕ ஐ வெற்றுத் தொடர்பு (empty relation) என்கிறோம்.

வெற்றுத் தொடர்பிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

6–4·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ பெண்கள் $\}$ என்ற கணத்தில் R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \Longleftrightarrow x$-ன் தாய் $y \wedge y$-ன் தாய் x என வரையறுக்கப்பட்டால், எந்தப் பெண்ணும் அவளுக்கே பாட்டியாக (maternal grand-mother) இருக்க முடியாது. ஆகவே, $R = \phi$. அதாவது, R ஒரு வெற்றுத் தொடர்பு.

6–5. அரங்கமும் வீச்சும் (Domain and Range)

$R \subset A \times B$, $(x, y) \in R$ எனில், அப்பொழுது $x R y$. எனவே, R-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் முதற் கூறு இரண்டாம் கூறுடன் R-தொடர்பு கொண்டுள்ளது. R-ல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் முதற் கூறுகளின் கணம் C, இரண்டாம் கூறுகளின் கணம் D எனில், அப்பொழுது $C \subset A$, $D \subset B$. C-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் D-ன் குறைந்தது ஓர் உறுப்புடன் R-தொடர்பு கொண்டுள்ளது. மேலும் $A - C$-ன் எந்த ஓர் உறுப்பிற்கும் $B - D$-ன் எந்த ஓர் உறுப்புடனும் R–தொடர்பு கிடையாது. எனவே, R ஐப் பொறுத்த வரையில் C-ம் D-ம் சிறப்பான கணங்கள். அவைகளின் சிறப்புப் பெயர்களைப் பார்ப்போம்.

6–5·1. வரையறை

R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு என்க. அப்பொழுது R-ல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் முதற் கூறுகளை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை R-ன் அரங்கம் (domain of R) என்றும், இரண்டாம் கூறுகளை மட்டும் உறுப்பு

களாகக் கொண்ட கணத்தை R-ன் வீச்சு (range of R) என்றும் அழைக்கிறோம். குறியீட்டில்,

R-ன் அரங்கம் $= \{ x \in A \mid (x, y) \in R \}$

R-ன் வீச்சு $= \{ y \in B \mid (x, y) \in R \}$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையறையிலிருந்து கீழ்க் காணும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

6–5·2. $x \in$ R-ன் அரங்கம் $\Longleftrightarrow \exists\, y \ni (x, y) \in R$

6–5·3. $y \in$ R-ன் வீச்சு $\Longleftrightarrow \exists\, x \ni (x, y) \in R$

6–5·4. R-ன் அரங்கம் $\subset A$

6–5·5. R-ன் வீச்சு $\subset B$

அடுத்து, சில எடுத்துக்காட்டுகள் பார்ப்போம்.

6–5·6. எடுத்துக்காட்டு

A = { இந்தியா, பிரான்சு, பர்மா, இத்தாலி, இலங்கை },

B = { கொழும்பு, இரங்கூன், மாஸ்கோ, கலிபோர்னியா, பாரிஸ், சிங்கப்பூர் },

R = { (பிரான்சு, பாரிஸ்), (பர்மா, இரங்கூன்), (இலங்கை, கொழும்பு) }

எனில், அப்பொழுது

R-ன் அரங்கம் = { பிரான்சு, பர்மா, இலங்கை },

R-ன் வீச்சு = { பாரிஸ், இரங்கூன், கொழும்பு }.

6–5·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 7, 4, 11 \}, \quad B = \{ 2, 5, 9, 8 \},$

$R = \{ (7, 9), (7, 8), (4, 9), (4, 8) \}$

எனில், அப்பொழுது

R-ன் அரங்கம் $= \{ 7, 4 \}$,

R-ன் வீச்சு $= \{ 9, 8, 5 \}$

6–5·8. எடுத்துக்காட்டு

A = { ஆண்கள் }, B = { பெண்கள் }, R என்பது A-லிருந்து B-க்கு 'மனைவி' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கிறது எனில், அப்பொழுது

R-ன் அரங்கம் = { திருமணமான ஆண்கள் }
R-ன் வீச்சு = { திருமணமான பெண்கள் }.

6–5·9. எடுத்துக்காட்டு

$R\ (=\phi)$ என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது

R-ன் அரங்கம் = { },
R-ன் வீச்சு = { }.

6–5·10. எடுத்துக்காட்டு

$R = A \times B$ எனில், அப்பொழுது

R-ன் அரங்கம் = A,
R-ன் வீச்சு = B.

கொடுக்கப்பட்ட கணங்களிலிருந்து புதுக் கணங்கள் அமைக்கும் வழிகளை ஏற்கெனவே அறிந்துள்ளோம். இதேபோல், கொடுக்கப்பட்ட தொடர்புகளிலிருந்த புதுத் தொடர்புகள் காண முடியுமா எனப் பார்ப்போம்.

R = { (கோவலன், கண்ணகி), (இராமன், சீதை), (காந்தி, கஸ்தூரி பாய்) }

என்ற தொடர்பிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் இரு கூறுகளையும் இடம் மாற்றினால்,

S = { (கண்ணகி, கோவலன்), (சீதை, இராமன்), (கஸ்தூரி பாய், காந்தி) }

என்ற புதுத் தொடர்பு கிடைக்கிறது. கூறுகளை இடம் மாற்றும் செயலால் கிடைக்கும் புதுத் தொடர்பின் பெயர், குறியீடு ஆகியவற்றை அடுத்துக் காண்போம்.

6–6. நேர்மாறு தொடர்பு (Inverse Relation)

6–6·1 வரையறை

R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது அதன் நேர்மாறு தொடர்பு (inverse relation) R^{-1} ஆனது,

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$(y, x) \in R \iff (x, y) \in R^{-1}.$$

அதாவது, $y\, R\, x \iff x\, R^{-1}\, y.$

வரையறையிலிருந்து கீழ்க்காணும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

6–6·3. $R^{-1} \subset B \times A$

6–6·4. R^{-1}-ன் அரங்கம் = R-ன் வீச்சு

6–6·5. R^{-1}-ன் வீச்சு = R-ன் அரங்கம்

கீழ் வருபவை நேர்மாறு தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

6–6·6. எடுத்துக்காட்டு

A = { திருக்குறள், சிலம்பு, எரிமலை, கரித்துண்டு },
B = { சாத்தனார், கம்பர், பாரதியார், இளங்கோ, வரதராசனார் } எனில், அப்பொழுது

R = {சிலம்பு, இளங்கோ), (கரித்துண்டு, வரதராசனார்)} என்பது A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. எனவே,

R^{-1} = { (இளங்கோ, சிலம்பு), (வரதராசனார், கரித் துண்டு) }.

6–6·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 2, 5, 9, 8 \}$, $B = \{ 4, 11, 7 \}$ எனில், அப்பொழுது,

$R = \{ (5, 4), (9, 4)\ (9, 7), (8, 4), (8, 7) \}$ என்பது

A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. எனவே,

$R^{-1} = \{ (4, 5), (4, 9), (7, 9), (4, 8), (7, 8) \}$.

6–6·8. எடுத்துக்காட்டு

A = { ஆண்கள் }, B = { பெண்கள் } எனில், 'மனைவி' என்ற தொடர்பு A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பாகும். இதை R என்று குறித்தால், R^{-1} என்பது 'கணவன்' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கும்.

6–6·9. எடுத்துக்காட்டு

முழு எண் கணத்தில் R என்பது 'வகுக்கிறது' என்ற தொடர்பைக் குறித்தால், R^{-1} என்பது 'வகுபடுகிறது' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கும்.

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது $(A')' = A$ என அறிவோம். அதாவது கண நிரப்புதலுக்கு இன்வலூஷன் பண்பு (involution property) உண்டு. அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து நேர்மாறலுக்கும் (inversion) இப் பண்பு உண்டு எனத் தெரிந்து கொள்வோம்.

6–6·10. தேற்றம்

R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில், அப் பொழுது $(R^{-1})^{-1} = R$.

நிறுவல் :

$$(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \iff (y, x) \in R^{-1} \quad [6\text{–}6\cdot 1\text{-ன் படி}]$$
$$\iff (x, y) \in R \quad [6\text{–}6\cdot 1\text{-ன் படி}]$$
$$\therefore \quad (R^{-1})^{-1} = R \quad [2\text{–}3\cdot 2\text{-ன் படி}]$$

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொடர்பிலிருந்து அதன் நேர்மாறு தொடர்பை அமைக்கும் வழியைக் கண்டோம். இனி, இரண்டு தொடர்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் அவைகளிலிருந்து புதுத் தொடர்பு அமைக்கும் வழியைக் காண்போம்.

6–7. தொடர்புகளின் சேர்க்கை (Composition of Relations)

6–7·1. வரையறை

R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு, S என்பது B-லிருந்து C-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது R, S களின் சேர்க்கைத் தொடர்பு (composite relation) $S \circ R$ ஆனது A-லிருந்து C-க்கு ஒரு தொடர்பு. இதை

$$S \circ R = \{ (x, y) \mid \exists\, z \in B \ni (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \}$$

என வரையறுக்கிறோம்.

அதாவது,

$$(x, y) \in S \circ R \iff \exists\, z \in B \ni (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S$$

அதாவது,

$$x\ S \circ R\ y \iff \exists\, z \in B \ni x R z \wedge z S y.$$

R, S-களின் சேர்க்கைத் தொடர்பை R, S-களின் தொடர்புப் பெருக்கம் (relative product) என்றும் அழைக்கிறோம்.

இனி, R, S என்ற தொடர்புகளில் குறைந்தது ஒன்று வெற்றுத் தொடர்பு எனில், அப்பொழுது $S \circ R$ எப்படி அமையும் என்ற வினு எழும். விடையை அடுத்தத் தேற்றத்தில் காணலாம்.

6–7·2. தேற்றம்

R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு, S என்பது B-லிருந்து C-க்கு ஒரு தொடர்பு என்க.

$R = \phi \vee S = \phi$ எனில், அப்பொழுது

$$S \circ R = \phi.$$

நிறுவல் :

$$R = \phi \vee S = \phi \quad (\text{எடுகோள்})$$

முடியுமானுல், $S \circ R \neq \phi$ என இருக்கட்டும். அப்பொழுது

$$\exists (x, y) \in S \circ R$$

$$\therefore \quad \exists z \in B \ni (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \qquad [6\text{–}7\cdot1\text{-ன் படி.}]$$

இது எடுகோளுடன் முரண்படுகிறது. எனவே,

$$S \circ R \neq \phi \text{ என இருக்க முடியாது.}$$

$$\therefore \quad S \circ R = \phi$$

கீழ் வருபவை சேர்க்கைத் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

6–7·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{2, 4, 1, 3, 6\}$, $C = \{1, 2, 5, 3, 8, 9\}$ எனில், அப்பொழுது $R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2)\}$ என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. $S = \{(4, 2), (2, 5), (3, 1), (1, 3)\}$ என்பது B-லிருந்து C-க்கு ஒரு தொடர்பு. இப்பொழுது $S \circ R = \{(1, 5), (3, 2), (2, 5)\}$.

6–7·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ எனில், அப்பொழுது $R = \{(1, 4), (3, 7), (8, 3)\}$, $S = \{(4, 5), (7, 1)\}$ என்பன A-ல் இரு தொடர்புகள். இப்பொழுது,

$$S \circ R = \{(1, 5), (3, 1)\}, \qquad R \circ S = \{(7, 4)\}.$$

இங்கு $S \circ R \neq R \circ S$.

6–7·5. எடுத்துக்காட்டு

ஆண்களின் கணத்தில் R என்பது 'தந்தை' என்ற தொடர்பையும், S என்பது 'அண்ணன்' என்ற தொடர்பையும் குறித்தால்,

அதாவது,

$x\,R\,y \iff x$-ன் தந்தை y

$y\,S\,z \iff y$-ன் அண்ணன் z எனில்,

$S \circ R$ என்பது 'பெரிய அப்பா' என்ற தொடர்பைக் குறிக்கும்.

6–7·4-லிருந்து தொடர்புகளின் சேர்க்கைக்கும் பரிமாற்றுப் பண்பு கிடையாது என அறிகிறோம். அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து இச் செயலுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு எனத் தெரிந்து கொள்வோம்.

6–7·6. தேற்றம்

R என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு,

S என்பது B-லிருந்து C-க்கு ஒரு தொடர்பு,

T என்பது C-லிருந்து D-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில்,

அப்பொழுது $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

நிறுவல் :

$(x, y) \in T \circ (S \circ R)$

$\iff \exists\, z \in C \ni (x, z) \in S \circ R \wedge (z, y) \in T$ [6–7·1-ன் படி]

$\iff \exists\, w \in B \wedge \exists\, z \in C \ni [(x, w) \in R \wedge (w, z) \in S)]$
$\wedge\ (z, y) \in T$ [6–7·1-ன் படி]

$\iff \exists\, w \in B \wedge \exists\, z \in C \ni (x, w) \in R \wedge [(w, z) \in S$
$\wedge\ (z, y) \in T\,]$ [1–10·18(a)-ன் படி]

$\iff \exists\, w \in B \ni (x, w) \in R \wedge (w, y) \in T \circ S$ [6–7·1-ன் படி]

$\iff (x, y) \in (T \circ S) \circ R$ [6–7·1-ன் படி]

$\therefore\ T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$ [2–3·2-ன் படி]

தொடர்புகளின் நேர்மாறல் (inversion), சேர்க்கை (composition) ஆகியவற்றின் பண்புகளைத் தனித்தனியே பார்த்தோம். அடுத்து, இந்த இரு செயல்களையும் இணைக்கும் விதியைப் பார்ப்போம்.

6–7·7. தேற்றம் [முன்பின்னுறுதல் விதி — Reversal Law]

R என்பது A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு,

S என்பது B-விருந்து C-க்கு ஒரு தொடர்பு எனில்,

அப்பொழுது $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

நிறுவல் :

$(x, y) \in (S \circ R)^{-1}$

$\Longleftrightarrow (y, x) \in S \circ R$ [6–6·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in B \ni (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S$ [6–7·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in B \ni (z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1}$
[6–6·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in B \ni (x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}$
[1–10·12(a)-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ [6–6·1-ன் படி]

$\therefore\ (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ [2–3·2-ன் படி]

6–8. மாதிரிக் கணக்குகள்

6–8·1. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4\}$ எனில், கீழ் வரும் R ஒவ்வொன்றும் A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பா எனக் காரணத்துடன் கூறுக.

(a) $R = (5, 4)$

(b) $R = \{(5, 2), (6, 4), (7, 4)\}$

(c) $R = \{(5, 2), (4, 2), (7, 4)\}$

(a) $A \times B$-ன் உட்கணங்கள் மட்டுமே A-விருந்து B-க்குத் தொடர்புகள். ஆனால் $R = (5, 4)$ என்பது $A \times B$-ன் உட்கணம் அல்ல. எனவே, R என்பது A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பல்ல.

(b) $R = \{(5, 2), (6, 4), (7, 4)\} \subset A \times B$. எனவே, R என்பது A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு.

(c) $(4, 2) \in R$. ஆனால் $(4, 2) \notin A \times B$. ஆகவே, $R \not\subset A \times B$. எனவே, R என்பது A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு அல்ல.

6–8·2. மாதிரிக் கணக்கு

கணம் A-ல் l உறுப்புகளும், கணம் B-ல் m உறுப்புகளும் இருந்தால், A-விருந்து B-க்கு மொத்தத்தில் எத்தனை தொடர்புகள் உள்ளன ?

எடுகோள்படி, $n(A) = l$, $n(B) = m$.

$\therefore \quad n(A \times B) = n(A).\, n(B)$ [5–8·2-ன் படி]

$= l\, m$

எனவே, 2–7·7-ன் படி, $A \times B$-க்கு மொத்தத்தில் 2^{lm} உட்கணங்கள் உள்ளன.

$\therefore$ A-விருந்து B-க்கு மொத்தத்தில் 2^{lm} தொடர்புகள் உள்ளன.

6–8·3. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{2, 4, 5, 3\}$, $B = \{11, 7, 6, 10, 17\}$ என்க.

A-விருந்து B-க்கு R என்ற தொடர்பானது.

$x\, R\, y \Longleftrightarrow x \mid y$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

$R = \{(2, 6), (2, 10), (5, 10), (3, 6)\}$

R-ன் அரங்கம் $= \{2, 5, 3\}$

R-ன் வீச்சு $= \{6, 10\}$

6–8·4. மாதிரிக் கணக்கு

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$-ல் R என்ற தொடர்பானது.

$x\, R\, y \Longleftrightarrow 2x + y = 10$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

$R = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$

$R^{-1} = \{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$

பயிற்சி 6

1. இரு பொருள் தொடர்பிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுத் தருக.
2. முப் பொருள் தொடர்பிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

3. $A = \{ 1, 2, \}, B = \{ 3, 4, 5 \}$ எனில், கீழ் வரும் R ஒவ்வொன்றும் A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பா எனக் கூறுக.

(a) $R = (2, 3)$

(b) $R = \{ (2, 3) \}$

(c) $R = \{ \{ (2, 3) \} \}$

4. கணம் A-ல் m உறுப்புகள் இருந்தால், A-ல் மொத்தம் எத்தனை தொடர்புகள் உள்ளன ?

5. $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $B = \{ 1, 3, 5 \}$ என்க. A-லிருந்து B-க்கு R என்ற தொடர்பானது

$x R y \iff x < y$ என வரையறுக்கப்பட்டால்,

R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு, R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. $A = \{ 8, 9. 10, 11 \}$, $B = \{ 2, 3. 7 \}$ என்க. A-லிருந்து B-க்கு R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \iff x$ ஆனது y ஆல் வகுபடுகிறது என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. $A = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots, 20 \}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x R y \iff x = 3y$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு, R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. $A = \{ 2, 3, 5, 6, \}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \iff x, y$ என்பன சார் பகா எண்கள் (relatively prime numbers) என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு, R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. $A = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \iff | x - y |$ ஆனது 3 ஆல் வகுபடுகிறது என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு, R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. $N = \{1, 2, 3, ...\}$-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$$x R y \Longleftrightarrow x + 3y = 12$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு, R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

11. $N = \{1, 2, 3, ...\}$-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$$x R y \Longleftrightarrow 2x + 4y = 15$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R, R-ன் அரங்கம், R-ன் வீச்சு, R^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

12. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A-ல் $R = \{(1, 1), (3, 3)$ $(5, 3)\}$ என்ற தொடர்பைக் கணம் கட்டும் வடிவில் எழுதுக.

13. $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ என்க. A-லிருந்து B-க்கு $R = \{(1, 5), (2, 7), (5, 2), (2, 3), (1, 9)\}$ என்ற தொடர்பிலிருந்தும், B-லிருந்து C-க்கு $S = \{(5, 7), (3, 5), (9, 2)\}$ என்ற தொடர்பிலிருந்தும், R^{-1}, S^{-1}, $S \circ R$, $(S \circ R)^{-1}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

14. $N = \{1, 2, 3, ...\}$-ல் $R = \{(1, 2), (2, 3), (5, 2), (7, 10)\}$,

$S = \{(2, 7), (3, 2), (6, 9)\}$ என்ற தொடர்புகளிலிருந்து, $S \circ R$, $R \circ S$, $(R \circ S)^{-1}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

விடைகள்

3. (a) இல்லை (b) ஆம் (c) இல்லை

4. 2^{mn}

5. $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$
   R-ன் அரங்கம் $= \{1, 2, 3, 4\}$
   R-ன் வீச்சு $= \{3, 5\}$
   $R^{-1} = \{(3, 1), (5, 1), (3, 2), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

6. $R = \{(8, 2), (9, 3), (10, 2)\}$
   R-ன் அரங்கம் $= \{8, 9, 10\}$
   R-ன் வீச்சு $= \{2, 3\}$
   $R^{-1} = \{(2, 8), (3, 9), (2, 10)\}$

7. $R = \{(3, 1), (6, 2), (9, 3), (12, 4), (15, 5), (18, 6)$

R-ன் அரங்கம் $= \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

R-ன் வீச்சு $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$R^{-1} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15)$
$(6, 18)\}$

8. $R = \{(2, 3), (2, 5), (3, 5), (5, 6), (3, 2), (5, 2)$
$(5, 3), (6, 5)\}$

R-ன் அரங்கம் $= \{2, 3, 5, 6\}$

R-ன் வீச்சு $= \{3, 5, 6, 2\}$

$R^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (5, 3), (6, 5), (2, 3), (2, 5),$
$(3, 5), (5, 6)\}$

9. $R = \{(2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5),$
$(6, 6), (5, 2), (6, 3)\}$

R-ன் அரங்கம் $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$

R-ன் வீச்சு $= \{2, 5, 3, 6, 4\}$

$R^{-1} = \{(2, 2), (5, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 5),$
$(6, 6), (2, 5), (3, 6)\}$

10. $R = \{(3, 3); (6, 2), (9, 1)\}$

R-ன் அரங்கம் $= \{3, 6, 9\}$

R-ன் வீச்சு $= \{3, 2, 1\}$

$R^{-1} = \{(3, 3), (2, 6), (1, 9)\}$

11. $R = \phi$

R-ன் அரங்கம் $= \phi$

R-ன் வீச்சு $= \phi$

$R^{-1} = \phi$

12. $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + 1 = 2y\}$

13. $R^{-1} = \{(5, 1), (7, 2), (2, 5), (3, 2), (9, 1)\}$

$S^{-1} = \{(7, 5), (5, 3), (2, 9)\}$

$S \circ R = \{(1, 7), (2, 5), (1, 2)\}$

$R \circ S = \{(3, 2), (9, 7), (9, 3)\}$

$(S \circ R)^{-1} = \{(7, 1), (5, 2), (2, 1)\}$

14. $S \circ R = \{(1, 7), (2, 2), (5, 7)\}$

$R \circ S = \{(2, 10), (3, 3)\}$

$(R \circ S)^{-1} = \{(10, 2), (3, 3)\}$

7. இரு பொருள் தொடர்புகளின் வகைகள்

ஒரு கணத்திலுள்ள தொடர்புகளில் சிலவற்றிற்குச் சிறப்பான பண்புகள் உள்ளன. இப் பண்புகளின் அடிப்படையில் தொடர்புகளைப் பல வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். அவைகளில் முக்கியமானவற்றை மட்டும் ஒவ்வொன்ருகப் பார்ப்போம்.

7·1 முற்ரெருமைத் தொடர்பு (Identity Relation)

7–1·1. வரையறை

A என்பது ஒரு கணம் என்க. அப்பொழுது $R = \{ (x, x) \mid x \in A \}$ ஐ A-ல் முற்ரெருமைத் தொடர்பு (the identity relation in A) என்கிருேம். இதை I_A ஆல் குறிக்கிருேம். எனவே,

$$I_A = \{ (x, x) \mid x \in A \}$$

வரையறையிலிருந்து கீழ்க்காணும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

7–1·2. $(x, y) \in I_A \Longleftrightarrow x = y$

7–1·3. I_A-ன் அரங்கம் $=$ I_A-ன் வீச்சு $= A$

முற்ரெருமைத் தொடர்பிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

7–1·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ எனில், அப்பொழுது

$I_A = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது I_A-ன் உறுப்புகள் அனைத்தும் $A \times A$-ன் கூறு விளக்கப் படத்தின் முக்கிய மூலைவிட்டத்தில் (leading diagonal) இருப்பதால், I_A ஐ A-ல் மூலைவிட்டத் தொடர்பு (diagonal relation in A) என்றும் அழைக்கிருேம்.

A-ல் பல தொடர்புகள் உள்ளன. அவற்றுள் I_A என்பது ஒரு சிறப்பான தொடர்பு. R என்பது A-ல் ஏதேனும் ஒரு தொடர்பு எனில், R-க்கும், I_A-க்கும் ஒரு நேர்த்தியான சம்பந்தம் உண்டு. இதை அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்வோம்.

7–1·5 தேற்றம்

R என்பது A-ல் ஏதேனும் ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது—

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

நிறுவல் :

$(x, y) \in R \circ I_A$

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in A \ni (x, z) \in I_A \wedge (z, y) \in R$ [6–7·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, x) \in I_A \wedge (x, y) \in R$ [7–1·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in R$

$\therefore\ R \circ I_A = R \ldots (1)$ [2–3 2-ன் படி]

$(x, y) \in I_A \circ R$

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in A \ni (x, z) \in R \wedge (z, y) \in I_A$ [6–7·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, y) \in I_A$ [7–1·2-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in R$

$\therefore\ I_A \circ R = R \ldots (2)$ [2–3·2-ன் படி]

எனவே. (1), (2)-லிருந்து,

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

7–1·5-லிருந்து, தொடர்புகளின் சேர்க்கை என்ற செயலுக்கு I_A என்பது முற்றொருமை உறுப்பு (identity element) என அறிகிறோம்.

7–2. பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு (Reflexive Relation)

7–2·1. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு என்க. $\forall\, x \in A$, $(x, x) \in R$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், R ஐ ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு என்கிறோம்.

குறியீட்டில்,

$\forall\, x \in A,\quad (x, x) \in R \Longleftrightarrow R$ ஆனது A-ல் பிரதிபலிப்பது.

அதாவது,

$\forall\, x \in A,\ x R x \Longleftrightarrow R$ ஆனது A-ல் பிரதிபலிப்பது. எனவே,

7–2·2 $I_A \subset R \Longleftrightarrow R$ ஆனது A-ல் பிரதிபலிப்பது.

கீழ் வருபவை பிரதிபலிக்கும் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

7–2·3. எடுத்துக்காட்டு

A = { அ, இ, உ } எனில், அப்பொழுது

R = { (அ, இ), (அ, அ), (உ, அ), (இ, இ) (உ, உ) }

A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு

7–2·4. எடுத்துக்காட்டு

A = { மெய் எண்கள் } என்க. அப்பொழுது, $\forall x \in A$, $x \leqslant x$. எனவே, '$\leqslant$' என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

7–2·5. எடுத்துக்காட்டு

A = { முழு எண்கள் } என்க. அப்பொழுது, $\forall x \in A$, $x \mid x$. எனவே, '$\mid$' என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

7–2·6. எடுத்துக்காட்டு

A = { ஒரு தளத்திலுள்ள கோடுகள் } என்க. அப்பொழுது, $\forall x \in A$, $x \parallel x$. எனவே, '$\parallel$' என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

7–2·7. எடுத்துக்காட்டு

A = { ஒரு தளத்திலுள்ள முக்கோணங்கள் } என்க. அப்பொழுது, $\forall x \in A$, $x \parallel\!\mid x$. எனவே, '$\parallel\!\mid$' என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

7–2·8. எடுத்துக்காட்டு

U முழுமைக் கணம், $A = P(U)$ என்க. அப்பொழுது, $\forall B \in A$, $B \subset B$. எனவே, '$\subset$' என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

7–2·9. எடுத்துக்காட்டு

A = { நகர்களில் வசிக்கும் மக்கள் } என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \Longleftrightarrow x$ என்பவர் y வசிக்கும் நகரில் வசிக்கிறார் என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது, $\forall x \in A$, $x R x$. எனவே, R என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

7–2·10. எடுத்துக்காட்டு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. அப்பொழுது, $\forall x \in A$, $(x, x) \in I_A$. எனவே, I_A என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

R என்பது A-ல் ஒரு தொடர்பு எனில், $\forall\, x \in A$, $(x, x) \in R$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், R ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு. எனவே, A-ன் குறைந்தது ஓர் உறுப்பிற்கேனும் இது பொருந்தாவிட்டால், R ஒரு பிரதிபலிக்காத தொடர்பு (non-reflexive relation) ஆகும்.

குறியீட்டில்,

7–2·11. $\exists\, x \in A \ni (x, x) \notin R \iff R$ ஆனது A-ல் பிரதிபலிக்காதது. அதாவது,

$\exists\, x \in A \ni x \not R\, x \iff R$ ஆனது A-ல் பிரதிபலிக்காதது.

கீழ் வருபவை பிரதிபலிக்காத தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

7–2·12. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ அ, ஆ, இ $\}$, $R = \{$ (அ, அ), (அ, இ), (ஆ, ஆ), (இ, ஆ) $\}$ எனில், அப்பொழுது (இ, இ) $\notin R$. எனவே, R என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்காத தொடர்பு.

7–2·13. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ மெய் எண்கள் $\}$ என்க. $x \in A$ எனில், அப்பொழுது $x \not< x$. எனவே, '$<$' என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்காத தொடர்பு.

7-2·14. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ ஒரு தளத்திலுள்ள கோடுகள் $\}$ என்க. அப்பொழுது A-ல் உள்ள எந்தக் கோடும் அதற்கே செங்குத்தாக இருக்க முடியாது. எனவே, '$\perp$' என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்காத தொடர்பு.

7–2·15. எடுத்துக்காட்டு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. $x \in A$ எனில், $(x, x) \notin \phi$. எனவே, வெற்றுத் தொடர்பு ϕ ஆனது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்காத தொடர்பு.

7–2·16. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ பெண்கள் $\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது $x R y \iff x$-ன் தாய் y என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது $x \in A \implies x \not R\, x$. அதாவது எந்த ஒரு பெண்ணும் அவளுக்கே தாய் அல்ல. எனவே R என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்காத தொடர்பு.

7–3. மாதிரிக் கணக்குகள்

7–3·1. மாதிரிக் கணக்கு

R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு தொடர்புகள். இவற்றுள் குறைந்தது ஒன்று பிரதிபலிக்குத் தொடர்பு எனில், $R \cup R'$ என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு என நிறுவுக.

எடுகோள்படி, R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு தொடர்புகள்

$\therefore \quad R \subset A \times A, R' \subset A \times A$ [6–3·4-ன் படி]

$\therefore \quad R \cup R' \subset A \times A$

$\therefore \quad R \cup R'$ என்பது A-ல் ஒரு தொடர்பு[6–3·4-ன் படி]

எடுகோள்படி, R, R' என்ற இரண்டுள் குறைந்தது ஒன்று பிரதி பலிப்பது.

$\therefore \quad \forall\, x \in A, \ (x, x) \in R \vee (x, x) \in R'$
[7–2·1-ன் படி]

$\therefore \quad \forall\, x \in A, \ (x, x) \in R \cup R'$ [3–2·2-ன் படி]

$\therefore \quad R \cup R'$ என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

7–3·2. மாதிரிக் கணக்கு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் எனில், $A \times A$ என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு என நிறுவுக.

$x \in A \Longrightarrow x \in A \wedge x \in A$ [1–10·11(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, x) \in A \times A$ [5–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad A \times A$ என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

பயிற்சி 7 (அ)

1. $A = \{1, 2, 3\}$ எனில், R என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பா எனக் கூறுக.

(a) $R = \phi$

(b) $R = \{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

(c) $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

(d) $R = A \times A$

2. இயற்கை எண் கணம் N-ல் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புகள் பிரதிபலிக்கும் தொடர்புகளா எனக் கூறுக.

(a) $x R y \Longleftrightarrow x > y$

(b) $x R y \Longleftrightarrow x = y$

(c) $x R y \Longleftrightarrow x + y = 10$

(d) $x R y \Longleftrightarrow x, y$ என்பன சார்பகா எண்கள் (Relatively Prime Numbers)

3. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு எனில், $R \cap R^{-1} \neq \phi$ என நிறுவுக.

4. R, R' என்பன கணம் A-ல் பிரதிபலிக்கும் தொடர்புகள் எனில், $R \cap R'$ என்பதும் A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு என நிறுவுக.

5. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு எனில், R^{-1} என்பதும் A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு என நிறுவுக.

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4)\}$ எனில், R-ல் சில உறுப்புகளைச் சேர்த்து, R ஐக் கணம் A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு ஆக்குக.

விடைகள்

1. (a) அல்ல (b) அல்ல (c) ஆம் (d) ஆம்

2. (a) அல்ல (b) ஆம் (c) அல்ல (d) அல்ல

6. $(3, 3), (4, 4)$ என்ற உறுப்புகளைச் சேர்க்கவேண்டும்.

7–4. சமச்சீர் தொடர்பு (Symmetric Relation)

7–4·1. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு, x, y என்பன A-ன் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் என்க. $(x, y) \in R$ என இருக்கும் பொழுதெல்லாம், $(y, x) \in R$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், R ஐ ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு என்கிறோம்.

குறியீட்டில்,

$[(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R] \Longleftrightarrow R$ ஆனது சமச்சீரானது.

வரையறையிலிருந்து, ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு R-க்கும் அதன் நேர்மாறு தொடர்பு R^{-1}-க்கும் ஒரு சம்பந்தம் இருப்பதை உணரலாம். இதை அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்வோம்.

7–4·2 தேற்றம்

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது
$$R \text{ சமச்சீரானது} \Longleftrightarrow R = R^{-1}$$

நிறுவல் :

பாகம் 1 :

R சமச்சீரானது $\Longrightarrow R = R^{-1}$ என நிறுவ வேண்டும்.

R சமச்சீரானது (எடுகோள்)

$\therefore \quad (x, y) \in R \Longleftrightarrow (y, x) \in R$ [7–4·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in R^{-1}$ [6–6·1-ன் படி]

$\therefore \quad R = R^{-1}.$ [2–3·2-ன் படி]

பாகம் 2 :

$R = R^{-1} \Longrightarrow R$ சமச்சீரானது என நிறுவ வேண்டும்.

$R = R^{-1}$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad (x, y) \in R \Longrightarrow (x, y) \in R^{-1}$ [2–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (y, x) \in R$ [6–6·1-ன் படி]

$\therefore \quad R$ சமச்சீரானது. [7–4·1-ன் படி]

கீழ்வருபவை சமச்சீர் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

7–4·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ எனில், அப்பொழுது R என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

7–4·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ ஒரு தளத்திலுள்ள கோடுகள் $\}$ என்க. அப்பொழுது $[x \in A, y \in A, x \parallel y] \Longrightarrow y \parallel x$. எனவே, '$\parallel$' என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

7–4·5. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ ஒரு தளத்திலுள்ள கோடுகள் $\}$ என்க. அப்பொழுது $[x \in A, y \in A, x \perp y] \Longrightarrow y \perp x$. எனவே, '$\perp$' என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

7–4·6. எடுத்துக்காட்டு

A = { மெய் எண்கள்} என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow x + y = 3$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு. ஏனென்றால்,

$$x\,R\,y \Longrightarrow x + y = 3 \Longrightarrow y + x = 3 \Longrightarrow y\,R\,x.$$

7–4·7. எடுத்துக்காட்டு

Z = { முழு எண்கள் } என்க. Z-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x\,R\,y \Longleftrightarrow x - y$ = 5-ன் மடங்கு

என வரையறுக்கப்பட்டால் அப்பொழுது R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு. ஏனென்றால்,

$$\begin{aligned} x\,R\,y &\Longrightarrow x - y = 5K, \quad K \in Z \\ &\Longrightarrow y - x = 5(-K), \quad -K \in Z \\ &\Longrightarrow y\,R\,x \end{aligned}$$

7–4·8. எடுத்துக்காட்டு

A = { ஆண்கள் } என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x\,R\,y \Longrightarrow$ x-ன் சகோதரன் y

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

7–4·9. எடுத்துக்காட்டு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க.

அப்பொழுது, $(x, x) \in I_A \Longleftrightarrow (x, x) \in I_A^{-1}$ [6–6·1-ன் படி]

$\therefore \quad I_A = I_A^{-1}$ [2–3·2-ன் படி]

எனவே, 7–4·2-ன் படி, I_A என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

7–4·10. எடுத்துக்காட்டு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. அப்பொழுது,

$(x, y) \in A \times A \Longrightarrow x \in A \wedge y \in A$ [5–3·2-ன்படி]

$\Longrightarrow y \in A \wedge x \in A$ [1–10·12 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (y, x) \in A \times A$ [5–3·2-ன் படி]

எனவே, 7–4·1-ன் படி, $A \times A$ என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

$[x \in A, y \in A, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R]$

$\Longleftrightarrow$ R ஆனது A-ல் சமச்சீரானது என அறிவோம். எனவே, A-ல் குறைந்தது இரு உறுப்புகள் x, y என்பவை $(x, y) \in R$ ஆனல் $(y, x) \notin R$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், R ஆனது A-ல் சமச்சீரற்றது (non symmetric). குறியீட்டில்,

7–4·11. $[\exists x, y \in A \ni (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R]$

$\Longleftrightarrow$ R ஆனது A ல் சமச்சீரற்றது.

கீழ்வருபவை சமச்சீரற்ற தொடற்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

7–4·12. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 3)\}$ எனில், அப்பொழுது $(2, 1) \in R \wedge (1, 2) \notin R$. எனவே, 7–4·11-ன் படி, R என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு.

7–4·13. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ மெய் எண்கள் $\}$ என்க. அப்பொழுது $3 < 5$ ஆனல் $5 \nless 3$. எனவே, '$<$' என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு.

7–4·14. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ முழு எண்கள் $\}$ என்க. அப்பொழுது $3 \mid 6$ ஆனல் $6 \nmid 3$. எனவே, '$|$' A-ல் ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு.

7–4·15. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ ஒரு தளத்திலுள்ள முக்கோணங்கள் $\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x R y \Longleftrightarrow$ x-ன் பரப்பளவு y-ன் பரப்பளவைப்போல் 2 மடங்கு என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது R ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு. ஏனென்றால்,

$x R y \Longrightarrow$ x-ன் பரப்பளவு y-ன் பரப்பளவைப்போல் 2 மடங்கு

$\Longrightarrow$ y-ன் பரப்பளவு x-ன் பரப்பளவைப்போல் $\frac{1}{2}$ மடங்கு

$\Longrightarrow y \not R x$.

7–4·16. எடுத்துக்காட்டு.

U முழுமைக் கணம், $A = P(U)$ என்க. அப்பொழுது, $B \in A$, $C \in A$, $B \subset C$ எனில், $C \subset B$ என இருக்க வேண்டியதில்லை. எனவே, '$\subset$' என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு.

7–4·17. எடுத்துக்காட்டு.

$A = \{$ மக்கள் $\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x R y \iff x$-ன் கணவன் y என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது R ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு.

7–4·18. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ மக்கள் $\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது
$x R y \iff x$-ன் சகோதரன் y

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது R ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு.

7–5. மாதிரிக் கணக்குகள்

7–5·1. மாதிரிக் கணக்கு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், A-ல் வெற்றுத் தொடர்பு R சமச்சீரானது என நிறுவுக.

முடியுமானால், R என்பது A-ல் சமச்சீரற்றதாக இருக்கட்டும். அப்பொழுது, 7–4·11-ன் படி,

$\exists\, x, y \in A \ni (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R.$
ஆனால், எடுகோள்படி, R வெற்றுத் தொடர்பு.

$\therefore\ (x, y) \notin R.$

$\therefore\ (x, y) \in R \wedge (x, y) \notin R$ என்பது ஒரு முரண்பாடு.

எனவே, R சமச்சீரற்றதாக இருக்கமுடியாது.

ஆகவே, R சமச்சீரானது.

7–5.2. மாதிரிக் கணக்கு

R, R' என்பன A-ல் இரு சமச்சீர் தொடர்புகள் எனில், $R \cup R'$ என்பதும் A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

எடுகோள்படி, R, R' என்பன A-ல் இரு தொடர்புகள்.

$\therefore \quad R \subset A \times A, \quad R' \subset A \times A$ [6–3·4-ன் படி]

$\therefore \quad R \cup R' \subset A \times A$

எனவே, 6–3·4-ன் படி, $R \cup R'$ என்பது A-ல் ஒரு தொடர்பு.
எடுகோள்படி, R, R' என்பன சமச்சீர் தொடர்புகள்.
எனவே, 7–4·1-ன் படி,

$$(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$(x, y) \in R' \Longrightarrow (y, x) \in R' \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

இப்பொழுது,

$(x, y) \in R \cup R' \Longrightarrow (x, y) \in R \vee (x, y) \in R'$ [3–2·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (y, x) \in R \vee (y, x) \in R'$ [(1), (2)-லிருந்து]

$\Longrightarrow (y, x) \in R \cup R'$ [3–2·2-ன் படி]

எனவே, 7–4·1-ன் படி, $R \cup R'$ என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

பயிற்சி 7 (ஆ)

1. $A = \{1, 2, 3\}$ எனில், R என்பது A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பா எனக் கூறுக.

   (a) $R = \{(1, 1)\}$

   (b) $R = \{(1, 2)\}$

   (c) $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

   (d) $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$

2. இயற்கை எண் கணம் N-ல் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புகள் சமச்சீர் தொடர்புகளா எனக் கூறுக.

   (a) $x R y \Longleftrightarrow x + y = 9$

   (b) $x R y \Longleftrightarrow x + y = 1$

   (c) $x R y \Longleftrightarrow x = 5y$

   (d) $x R y \Longleftrightarrow x < y$

3. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு வெற்றற்ற சமச்சீர் தொடர்பு எனில், $R \cap R^{-1} \neq \phi$ என நிறுவுக.

4. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு எனில், R^{-1} என்பதும் A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

5. R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு சமச்சீர் தொடர்புகள் எனில், $R \cap R'$ என்பதும் A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

6. ஏதேனுமொரு கணத்தில் ஒவ்வொரு தொடர்பும் சமச்சீர் தொடர்பாக இருக்க முடியுமா? முடியுமானால், அதைக் காண்க.

7. A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம். I_A-ன் எந்த ஓர் உட்கணமும் A-ல் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

விடைகள்

1 (a) ஆம் (b) அல்ல (c) ஆம் (d) அல்ல.

2 (a) ஆம் (b) ஆம் (c) அல்ல (d) அல்ல.

6. வெற்றுக் கணம், ஒருறுப்புக் கணங்கள் ஆகியவற்றில் ஒவ்வொரு தொடர்பும் சமச்சீரானது.

7–6. டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு (Transitive Relation)

7–6·1. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு. x, y, z என்பன A-ன் எவையேனும் மூன்று உறுப்புகள் என்க. $(x, y) \in R$, மற்றும் $(y, z) \in R$ என இருக்கும் பொழுதெல்லாம், $(x, z) \in R$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், R ஐ ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு என்கிறோம்.

குறியீட்டில்,

$$[(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R]$$

$\Longleftrightarrow$ R ஆனது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

வரையறையிலிருந்து, ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு R-க்கும், $R \circ R$ என்ற சேர்க்கைத் தொடர்புக்கும் ஒருசம்பந்தம் இருப்பதை உணரலாம். இதை அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்வோம்.

7–6·2. தேற்றம்

R என்பது கணம் A-ல் ஏதேனும் ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது

R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு $\Longleftrightarrow R \circ R \subset R$

நிறுவல் :

பாகம் 1 :

R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு $\Longrightarrow R \circ R \subset R$ என நிறுவ வேண்டும்.

R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு (எடுகோள்)

$(x, y) \in R \circ R \Longrightarrow \exists\, z \in A \ni (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R$ [6–7·1-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in R$ [எடுகோள் படி]

$\therefore R \circ R \subset R$ [2–5·2-ன் படி]

பாகம் 2 :

$R \circ R \subset R \Longrightarrow R$ ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு என நிறுவ வேண்டும்.

$R \circ R \subset R$ (எடுகோள்)

$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$ என்க. அப்பொழுது, 6-7·1-ன் படி,

$(x, z) \in R \circ R$

ஆனல், எடுகோள் படி, $R \circ R \subset R$

$\therefore (x, z) \in R$ [2–5·2-ன் படி]

இந்த விதமாக, $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$.
எனவே, 7–6·1-ன் படி, R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

கீழ்வருபவை டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

7–6·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$. $R_1 = \{(1, 1)\}$, $R_2 = \{(3, 1)\}$, $R_3 = \{(1, 2), (2, 2)\}$, $R_4 = \{(1, 3), (3, 2), (1, 2), (1, 1), (3, 3)\}$ எனில், R_1, R_2, R_3, R_4 என்ற நான்கும் A-ல் டிரான்சிட்டிவ் தொடர்புகள்.

7–6·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$மெய் எண்கள்$\}$ என்க. அப்பொழுது $[x, y, z \in A,\ x < y \wedge y < z] \Longrightarrow x < z$. எனவே, '$<$' என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–6·5. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$முழு எண்கள்$\}$ என்க. அப்பொழுது $[x, y, z \in A, x \mid y \wedge y \mid z] \Longrightarrow x \mid z$. எனவே, '$\mid$' என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–6·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ ஒரு தளத்திலுள்ள கோடுகள் $\}$ என்க. அப்பொழுது $[x, y, z \in A, x \parallel y \wedge y \parallel z] \Longrightarrow x \parallel z$. எனவே, '$\parallel$' என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–6·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ ஒரு தளத்திலுள்ள முக்கோணங்கள் $\}$ என்க. அப்பொழுது. $[x, y, z \in A, x \mid\mid\mid y \wedge y \mid\mid\mid z] \Longrightarrow. x \mid\mid\mid z$. எனவே, '$\mid\mid\mid$' என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–6·8. எடுத்துக்காட்டு

U முழுமைக் கணம், $A = P(U)$ என்க. அப்பொழுது $[B, C, D, \in A, B \subset C \wedge C \subset D] \Longrightarrow B \subset D$. எனவே, '$\subset$' என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–6·9. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ மக்கள் $\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \Longleftrightarrow x$-ன் தங்கை y

என வரையறுக்கப்பட்டால் அப்பொழுது R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–6·10. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ மக்கள் $\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$x R y \Longleftrightarrow x$-ன் மனைவி y

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

$[x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R] \Longleftrightarrow R$ ஆனது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு என அறிவோம். எனவே A-ல் குறைந்தது மூன்று உறுப்புகள் x, y, z என்பவை $(x, y) \in R$, மற்றும் $(y, z) \in R$ ஆனால் $(x, z) \notin R$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், R என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு (non-transitive relation). குறியீட்டில்,

7–6·11. $[\exists\, x, y, z \in A \ni (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$ ஆனால் $(x, z) \notin R]$
$\Longleftrightarrow R$ ஆனது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு.

கீழ்வருபவை டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

7–6·12. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 2), (3, 1)\}$ என்க. அப்பொழுது $(3, 1) \in R \wedge (1, 2) \in R$. ஆனால் $(3, 2) \notin R$. எனவே, R என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு.

7–6·13. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$முழு எண்கள்$\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x\,R\,y \Longleftrightarrow x - y$ ஓர் ஒற்றை எண் என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$10\,R\,7 \wedge 7\,R\,2$. ஆனால் $10 \not R\, 2$. எனவே, R என்பது ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு.

7–6·14. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ ஒரு தளத்திலுள்ள கோடுகள் $\}$ என்க. x, y, z என்பன A-ன் மூன்று உறுப்புகள் என்க. $x \perp y \wedge y \perp z$ எனில், அப்பொழுது $x \parallel z$. எனவே, '$\perp$' என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு.

7–6·15. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$மெய் எண்கள்$\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow x + y = 10$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$7\,R\,3 \wedge 3\,R\,7$. ஆனால் $7 \not R\, 7$. எனவே, R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு.

7–6·16. எடுத்துக்காட்டு

இயற்கை எண் கணம் N-ல் R என்ற தொடர்பானது, $x \, R \, y \iff x \, y$ களின் உ. பொ. கா. 1 என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$6 \, R \, 7 \wedge 7 \, R \, 8. \text{ ஆனால் } 6 \not R \, 8.$$

எனவே, R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு.

7–6·17. எடுத்துக்காட்டு

A { மக்கள் } என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x \, R \, y \iff x$-ன் மகன் y

என வரையறுக்கப்பட்டால் அப்பொழுது R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு. ஏனென்றால்,

$x \, R y \wedge y R z \implies x$-ன் மகன் $y \wedge y$-ன் மகன் z

$\implies x$-ன் பேரன் z

$\implies x \not R \, z$

7–7. மாதிரிக் கணக்குகள்

7–7·1. மாதிரிக் கணக்கு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், A-ல் வெற்றுத் தொடர்பு R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு என நிறுவுக.

முடியுமானால், R என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பாக இருக்கட்டும். அப்பொழுது, 7-6·11-ன் படி $\exists \, x, y, z \in A \ni (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$ ஆனால் $(x, z) \notin R$. ஆனால் $(x, y) \in R$ என்பது ஒரு முரண்பாடு. ஏனென்றால், R ஆனது A-ல் வெற்றுத் தொடர்பு. எனவே, R ஆனது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பாக இருக்க முடியாது. ஆகவே R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–7·2. மாதிரிக் கணக்கு

R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்புகள் எனில், $R \cap R'$ என்பதும் A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு என நிறுவுக.

எடுகோள்படி, R, R' என்பன A-ல் இரு தொடர்புகள்.

$\therefore \quad R \subset A \times A, \; R' \subset A \times A$ [6–3·4-ன் படி]

$\therefore \quad R \cap R' \subset A \times A$

$\therefore \quad R \cap R'$ ஆனது A-ல் ஒரு தொடர்பு [6–3·4-ன் படி]

எடுகோள்படி, R, R' என்பன டிரான்சிட்டிவ் தொடர்புகள். எனவே, 7–6·1-ன் படி,

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R \ldots (1)$$

$$(x, y) \in R' \wedge (y, z) \in R' \Longrightarrow (x, z) \in R' \ldots (2)$$

இப்பொழுது,

$(x, y) \in R \cap R' \wedge (y, z) \in R \cap R'$

$\Longrightarrow [(x, y) \in R \wedge (x, y) \in R'] \wedge [(y, z) \in R \wedge (y, z) \in R']$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R] \wedge [(x, y) \in R' \wedge (y, z) \in R']$ [1–10 12-(a) மற்றும் 1–10·18-(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, z) \in R \wedge (x, z) \in R'$ [(1), (2)-லிருந்து]

$\Longrightarrow (x, z) \in R \cap R'$ [3–3·2-ன் படி]

எனவே, 7–6·1-ன் படி, $R \cap R'$ என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு

பயிற்சி 7 (இ)

1. $A = \{1, 2, 3\}$ எனில், R என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பா எனக் கூறுக.

(a) $R = \{(1, 1)\}$
(b) $R = \{(1, 2)\}$
(c) $R = \{(1, 2), (2, 2)\}$
(d) $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (1, 1)\}$

2. இயற்கை எண் கணம் N-ல் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புகள் டிரான்சிட்டிவ் தொடர்புகளா எனக் கூறுக

(a) $x R y \Longleftrightarrow x + y = 1$
(b) $x R y \Longleftrightarrow x + 2y = 5$
(c) $x R y \Longleftrightarrow x \geqslant y$
(d) $x R y \Longleftrightarrow x - y = 1$

3. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு எனில், R^{-1} என்பதும் A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு என நிறுவுக.

4. A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், $A \times A$ என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு என நிறுவுக.

5. R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்புகள் எனில், $R \cup R'$ என்பது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பாக இருக்க வேண்டியதில்லை என நிறுவுக.

6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (3, 4), (4, 1), (2, 3)\}$ எனில், R-ல் சில உறுப்புகளைச் சேர்த்து R ஐ A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு ஆக்குக.

விடைகள்

1. (a) ஆம் (b) ஆம் (c) ஆம் (d) அல்ல
2. (a) ஆம் (b) அல்ல (c) ஆம் (d) அல்ல.
6. $(3, 1)$, $(2, 4)$ உறுப்புகளைச் சேர்க்கவேண்டும்.

7–8. எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு (Anti symmetric Relation)

7–8·1. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு, x, y என்பன A-ன் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் என்க. $(x, y) \in R$ மற்றும் $(y, x) \in R$ என இருக்கும் போதெல்லாம், $x = y$ என இருந்தால்தான், R ஐ ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு என்கிறோம்.

குறியீட்டில்,

$$[(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow x = y]$$

$\Longleftrightarrow R$ ஆனது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

வரையறையிலிருந்து, ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு R, அதன் நேர்மாறு தொடர்பு R^{-1}, A-ன் முற்றொருமைத் தொடர்பு I_A ஆகிய மூன்றிற்கும் ஒரு சம்பந்தம் இருப்பதை உணரலாம். இதை அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்வோம்.

7–8·2. தேற்றம்

R என்பது A-ல் ஒரு தொடர்பு எனில், அப்பொழுது R எதிர் சமச்சீரானது $\Longleftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I_A$

நிறுவல்

பாகம் 1 :

R எதிர் சமச்சீரானது $\Longrightarrow R \cap R^{-1} \subset I_A$ என நிறுவ வேண்டும்.

R எதிர் சமச்சீரானது (எடுகோள்)

$(x, y) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in R^{-1}$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$ [6–6·1-ன் படி]

$\Longrightarrow x = y$ [எடுகோள் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in I_A$ [7–1·2-ன் படி]

$\therefore \quad R \cap R^{-1} \subset I_A$ [2–5·2-ன் படி]

பாகம் 2 :

$R \cap R^{-1} \subset I_A \Longrightarrow R$ எதிர் சமச்சீரானது என நிறுவ வேண்டும்.

$R \cap R^{-1} \subset I_A$ (எடுகோள்)

$\therefore \quad (x, y) \in R \cap R^{-1} \Longrightarrow (x, y) \in I_A$ [2–5·2-ன் படி]

அதாவது, $(x, y) \in R \wedge (x, y) \in R^{-1} \Longrightarrow (x, y) \in I_A$ [3·3. 2-ன் படி]

(அ-து) $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow (x, y) \in I_A$ [6–6·1-ன் படி]

(அ-து) $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$ [7–1·2-ன் படி]

$\therefore \quad R$ எதிர் சமச்சீரானது [7–8·1-ன் படி]

கீழ்வருபவை எதிர் சமச்சீர் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

7–8·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 1)\}$ என்க. அப்பொழுது,

$R \cap R^{-1} = \{(1, 1)\} \cap \{(1, 1)\} = \{(1, 1)\} \subset I_A$.

எனவே, 7–8·2-ன் படி, R என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7–8·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 2)\}$ என்க. அப்பொழுது, $R \cap R^{-1} = \{(1, 2)\} \cap \{(2, 1)\} = \phi \subset I_A$ எனவே, 7–8·2-ன் படி R என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7-8·5. எடுத்துக்காட்டு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம், R என்பது A-ல் வெற்றுத் தொடர்பு என்க. அப்பொழுது, $R \cap R^{-1} = \phi \cap \phi = \phi \subset I_A$. எனவே, 7–8·2-ன் படி R என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7–8·6. எடுத்துக்காட்டு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. அப்பொழுது, $I_A \cap I_A^{-1} = I_A \cap I_A = I_A \subset I_A$. எனவே, 7–8·2-ன் படி, I_A ஆனது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7-8·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ மெய் எண்கள் $\}$ என்க. அப்பொழுது $[x, y \in A, x \leqslant y \wedge y \leqslant x] \Longrightarrow x = y$. எனவே, '$\leqslant$' என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7–8·8. எடுத்துக்காட்டு

U முழுமைக் கணம், $A = P(U)$ என்க. அப்பொழுது $[B, C \in A, B \subset C \wedge C \subset B] \Longrightarrow B = C$. எனவே, '$\subset$' என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7–8·9. எடுத்துக்காட்டு

N-ல் R என்ற தொடர்பானது, $x R y \Longleftrightarrow x + 3y = 12$, என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$R = \{(3, 3), (6, 2), (9, 1)\}; \; R^{-1} = \{(3, 3), (2, 6), (1, 9)\}.$$

ஆகவே, $R \cap R^{-1} = \{(3, 3)\} \subset I_N$. எனவே, 7–8·2-ன் படி R என்பது N-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7–9. மாதிரிக் கணக்குகள்

7–9·1. மாதிரிக் கணக்கு

A என்பது ஒரு வெற்றற்ற கணம் எனில், I_A-ன் எந்த ஓர் உட்கணமும் A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

$R \subset I_A$ என இருக்கட்டும். அப்பொழுது $R^{-1} = R$. எனவே $R \cap R^{-1} = R \cap R = R \subset I_A$. ஆகவே, 7–8·2-ன் படி, R என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

7–9·2. மாதிரிக் கணக்கு

R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு எதிர் சமச்சீர் தொடர்புகள் எனில், $R \cup R'$ என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பாக இருக்க வேண்டியதில்லை என நிறுவுக.

$A = \{1, 2\}$. $R = \{(1, 2)\}$, $R' = \{(2, 1)\}$ என்க. அப்பொழுது, R, R' என்பன A-ல் இரு எதிர் சமச்சீர் தொடர்புகள். இப்பொழுது $R \cup R' = \{(1, 2), (2, 1)\}$. $(1, 2) \in R \cup R' \wedge (2, 1) \in R \cup R'$ ஆனால் $1 \neq 2$. எனவே, $R \cup R'$ என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பல்ல.

பயிற்சி 7 (ஈ)

1. $A = \{1, 2, 3\}$ எனில், R என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர், தொடர்பா எனக் கூறுக.

   (a) $R = \{(2, 3)\}$

   (b) $R = \{(3, 3)\}$

   (c) $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

   (d) $R = A \times A$

   (e) $R = \phi$

2. இயற்கை எண் கணம் N-ல் கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்புகள் எதிர் சமச்சீர் தொடர்புகளா எனக் கூறுக.

   (a) $x R y \Longleftrightarrow x \geqslant y$

   (b) $x R y \Longleftrightarrow x = y$

   (c) $x R y \Longleftrightarrow x \mid y$

   (d) $x R y \Longleftrightarrow |x - y| = 1$

   (e) $x R y \Longleftrightarrow xy$ ஒரு வர்க்கம்

   (f) $x R y \Longleftrightarrow 3x + 2y = 30$

3. எந்த ஓர் ஒருறுப்புக் கணத்திலும் ஒவ்வொரு தொடர்பும் எதிர் சமச்சீரானது என நிறுவுக.

4. R என்பது கணம் A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு எனில், R^{-1} என்பதும் A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

5. R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு எதிர் சமச்சீர் தொடர்புகள் எனில், $R \cap R'$ என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

6. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு $R. \cap R^{-1} = \phi$ எனில், R என்பது A-ல் ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு என நிறுவுக.

விடைகள்

1 (a) ஆம் (b) ஆம் (c) அல்ல (d) அல்ல (e) ஆம்.
2 (a) ஆம் (b) ஆம் (c) ஆம் (d) அல்ல (e) அல்ல (f) ஆம்.

7–10. மாதிரிக் கணக்குகள்

7–10·1. மாதிரிக் கணக்கு

இயற்கை எண் கணம் N-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow x + 3y = 12$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R-ன் தன்மை என்ன?

R-ன் வரையறையிலிருந்து, $R = \{(3, 3), (6, 2), (9, 1)\}$.

$1 \in N$. ஆனால் $(1, 1) \notin R$. எனவே, 7–2·11-ன் படி R ஒரு பிரதிபலிக்காத தொடர்பு.

$R^{-1} = \{(3, 3), (2, 6), (1, 9)\} \neq R$. எனவே, 7–4·2-ன் படி, R ஒரு சமச்சீரற்ற தொடர்பு.

$R \cap R^{-1} = \{(3, 3)\} \subset I_N$. எனவே, 7–8·2-ன் படி, R ஓர் எதிர்சமச் சீர் தொடர்பு.

$R \circ R = \{(3, 3)\} \subset R$. எனவே, 7–6·2-ன் படி, R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

7–10·2. மாதிரிக் கணக்கு

இயற்கை எண் கணம் N-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$a\,R\,b \Longleftrightarrow a^2 - 4ab + 3b^2 = 0$ என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஆனது N-ல் பிரதிபலிப்பது, சமச்சீரற்றது, டிரான்சிட்டிவ் அல்லாதது என நிறுவுக.

$\forall\, a \in N,\ a^2 - 4a.\ a + 3a^2 = 0$

எனவே, $\forall\, a \in N,\quad a\,R\,a.$

ஆகவே, 7–2·1-ன் படி, R ஆனது N-ல் பிரதிபலிப்பது.

$a = 3,\ b = 1$ எனில், அப்பொழுது

$a^2 - 4ab + 3b^2 = 9 - 12 + 3 = 0.$

$\therefore\ 3\,R\,1$ ...... (1)

$a = 1,\ b = 3$ எனில், அப்பொழுது

$a^2 - 4ab + 3b^2 = 1 - 12 + 27 \neq 0$

$\therefore\ 1 \not R\, 3$ ...... (2)

(1), (2)-லிருந்து, $3\,R\,1 \wedge 1 \not R\, 3.$

எனவே, 7–4·11-ன் படி, R ஆனது N-ல் சமச்சீரற்றது.

$a = 9,\quad b = 3$ எனில், அப்பொழுது

$a^2 - 4ab + 3b^2 = 81 - 108 + 27 = 0$

$\therefore\ 9\,R\,3$ ...... (3)

$a = 9,\ b = 1$ எனில், அப்பொழுது

$a^2 - 4ab + 3b^2 = 81 - 36 + 3 \neq 0.$

$\therefore\ 9 \not R\, 1$ .... (4)

(3), (1), (4)-லிருந்து, $9\,R\,3 \wedge 3\,R\,1.$ ஆனால் $9 \not R\, 1.$ எனவே, 7–6·11-ன் படி R ஆனது N-ல் டிரான்சிட்டிவ் அல்லாதது.

7–10·3. மாதிரிக் கணக்கு

R என்பது கணம் A-ல் சமச்சீர் மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு. $x, y, z \in A$ எனில், $x\,R\,y \wedge y \not R\, z \Longrightarrow x \not R\, z$ என நிறுவுக.

$x\,R\,y \wedge y \not R\, z$ (எடுகோள்)

முடியுமானால், $x\,R\,z$ என இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது $z\,R\,x$ [$\because R$ சமச்சீரானது]

ஆனால் $x\,R\,y$ (எடுகோள்)

$\therefore\ z\,R\,x \wedge x\,R\,y$

$\therefore\ z\,R\,y$ [$\because R$ ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு]

$\therefore\ y\,R\,z$ [$\because R$ சமச்சீரானது]

இப்பொழுது $y\,R\,z$ என்பது $y \not R\, z$ என்பதுடன் முரண்படுகிறது. எனவே, $x\,R\,z$ என இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad x \not R\, z$

7–10·4. மாதிரிக் கணக்கு

சமச்சீர் மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனால் பிரதிபலிக்காத தொடர்புக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

(மதுரை ப.க. M. Sc. 1969)
(மீரட் ப. க. 1969)

$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$ என்க. அப்பொழுது $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2) = R$.

எனவே, 7–4·2-ன் படி, R ஆனது A-ல் சமச்சீரானது.

$R \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2\ 1)\} = R \subset R$. எனவே, 7–6·2-ன் படி, R ஆனது A-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

$3 \in A$ ஆனால் $(3, 3) \notin R$.

எனவே, 7–2·11-ன் படி, R ஆனது A-ல் பிரதிபலிக்காதது.

பயிற்சி 7 (உ)

1. இயற்கை எண் கணம் N-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow x + 2y = 10$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R-ன் தன்மை என்ன?

2. இயற்கை எண் கணம் N-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow x \mid y$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஆனது பிரதிபலிக்கும் மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனால் சமச்சீரற்ற தொடர்பு என நிறுவுக.

3. முழு எண் கணம் Z-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x\,R\,y \Longleftrightarrow x, y$ என்பன ஒற்றை எண்கள்

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஆனது சமச்சீர் மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனால் பிரதிபலிக்காத தொடர்பு என நிறுவுக.

4. மெய் எண் கணம் A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow |x - y| \leqslant \tfrac{1}{2}$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஆனது பிரதிபலிக்கும் மற்றும் சமச்சீர் ஆனால் டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு என நிறுவுக.

5. கணக்குகள் 2, 3, 4 ஆகியவற்றிலிருந்து உங்கள் முடிவு என்ன?

6. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு. $R \cap R^{-1} = \phi$ எனில், R-ன் தன்மை என்ன?

7. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு. $R = R^{-}$ எனில், R-ன் தன்மை என்ன?

8. ஒரு கணத்தில் சமச்சீராகவும் எதிர் சமச்சீராகவும் உள்ள தொடர்பு ஏதேனும் உண்டா?

9. கீழ் வரும் தொடர்புகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஓர் எடுத்துக் காட்டு தருக.

(a) பிரதிபலிப்பது ஆனால் சமச்சீரற்றது மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் அல்லாதது.

(b) டிரான்சிட்டிவ் ஆனது ஆனால் பிரதிபலிக்காதது மற்றும் சமச்சீரற்றது.

(c) சமச்சீரானது ஆனால் பிரதிபலிக்காதது மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் அல்லாதது.

(d) பிரதிபலிப்பது மற்றும் சமச்சீரானது ஆனால் டிரான்சிட்டிவ் அல்லாதது.

(e) சமச்சீரானது மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனது ஆனால் பிரதிபலிக்காதது.

(f) பிரதிபலிப்பது மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனது ஆனால் சமச்சீரற்றது.

(g) பிரதிபலிப்பது, சமச்சீரானது மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனது.

(h) பிரதிபலிப்பது, எதிர் சமச்சீரானது மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனது.

10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 2)\}$ எனில், R-ல் சில உறுப்புகளைச் சேர்த்து, R ஐ

A-ல் சமச்சீர் மற்றும் டிரான்சிட்டிவ் ஆனால் பிரதிபலிக்காத தொடர்பு ஆக்குக.

11. கணம் A-ல் R என்ற தொடர்பானது டிரான்சிட்டிவ் மற்றும் சமச்சீரானது. $x, y, z \in A$ எனில்,

$z\,R\,x \wedge z\,R\,y \Longrightarrow x\,R\,y$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. பிரதிபலிக்காதது, சமச்சீரற்றது, டிரான்சிட்டிவ் அல்லாதது, எதிர்சமச்சீரானது.

5. ஒரு தொடர்புக்கு பிரதிபலிக்கும்,பண்பு, சமச்சீர் பண்பு, டிரான்சிட்டிவ் பண்பு ஆகிய மூன்றில் எவையேனும் இரண்டு பண்புகள் இருந்தால், மூன்றாவது பண்பு இருக்க வேண்டியதில்லை.

6. எதிர் சமச்சீரானது.

7. சமச்சீரானது.

8. A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது I_A-ன் எந்த ஓர் உட்கணமும் ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு மற்றும் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு.

9. $A = \{1, 2, 3\}$ -ல் கீழ்வரும் தொடர்புகள் தேவையான பண்புகளைக் கொண்டுள்ளன.

(a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3) (2, 1), (1, 3)\}$

(b) $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

(c) $\{(2, 3), (3, 2)\}$

(d) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 1), (1, 3)\}$

(e) $\{(2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

(f) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1)\}$

(g) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(h) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

10. $(3, 1), (2, 3), (1, 2), (2, 1)$ ஆகிய உறுப்புகளைச் சேர்க்கவேண்டும்.

8. சமத்துவத் தொடர்பும் பகுதி வரிசைத் தொடர்பும்

(Equivalence Relation and Partial Order Relation)

தொடர்புகளுக்குப் பல பண்புகள் உண்டு. அவைகளுள் முற்றொருமைப் பண்பு, பிரதிபலிக்கும் பண்பு, சமச்சீர் பண்பு, எதிர் சமச்சீர் பண்பு, டிரான்சிட்டிவ் பண்பு என்ற ஐந்து முக்கியப் பண்புகளை மட்டும் தெரிந்து கொண்டுள்ளோம். இவற்றுள் சில பண்புகள் ஒரு தொடர்புக்கு ஒருங்கே அமைந்தால், அதன் சிறப்பும் பயனும் மிகுகின்றன. இந்த அடிப்படையில் இரு வகைத் தொடர்புகள் மிகவும் சிறப்பானவை. ஒரு வகைத் தொடர்பு களுக்குப் பிரதிபலிக்கும் பண்பு, சமச்சீர் பண்பு, டிரான்சிட்டிவ் பண்பு ஆகிய மூன்றும் உண்டு. இவ்வகைத் தொடர்புகள் கணிதத்தில் மட்டுமன்றி மற்றத் துறைகளிலும் மிகுதியாகப் பயன் படுகின்றன. புதுமை இயற்கணிதத்தில் (Modern Algebra) இவைகள் சிறப்பான இடத்தைப் பெற்றுள்ளன. இரண்டாம் வகைத் தொடர்புகள் பிரதிபலிக்கும் பண்பு, எதிர் சமச்சீர் பண்பு, டிரான்சிட்டிவ் பண்பு ஆகிய மூன்றையும் ஒருங்கே கொண்டவை. இவைகள் கணிதத்திலும், அனுபவ அறிவியல்களிலும் (Empirical Sciences) சிறப்பாகப் பயன்படுகின்றன.

8·1 சமத்துவத் தொடர்பு (Equivalence Relation)

8–1·1. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு தொடர்பு என்க. R-க்குப் பிரதி பலிக்கும் பண்பு, சமச்சீர் பண்பு, டிரான்சிட்டிவ் பண்பு ஆகிய மூன்றும் இருந்தால் இருந்தால்தான், R ஐ A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என்கிறோம்.

கீழ்வருபவை சமத்துவத் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

8–1·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ என்க. அப்பொழுது $I_A \subset R$.

எனவே, 7–2·2-ன் படி, R ஆனது A-ல் பிரதிபலிப்பது.

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (2, 3)\} = R.$$

எனவே, 7–4·2-ன் படி, R ஆனது சமச்சீரானது.

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\} = R \subset R.$$

எனவே, 7–6·2-ன் படி, R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

ஆகவே, R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

8–1·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$மெய் எண்கள்$\}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow x - y = \text{ஒரு முழு எண்}$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$\forall\, x \in A,\ x - x = 0 =$ ஒரு முழு எண்.

$\therefore\ \forall\, x \in A,\ x\,R\,x$ [R-ன் வரையறைப் படி]

எனவே, 7–2·1-ன் படி, R பிரதிபலிப்பது.

$x\,R\,y \Longrightarrow x - y = n$ (ஒரு முழு எண்) [R-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow y - x = -n$ (ஒரு முழு எண்)

$\Longrightarrow y\,R\,x$ [R-ன் வரையறைப் படி]

எனவே, 7–4·1-ன் படி, R சமச்சீரானது.

$[x\,R\,y \wedge y\,R\,z]$

$\Longrightarrow x - y = m$ (ஒரு முழு எண்) $\wedge\ y - z = n$ (ஒரு முழு எண்)
[R-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow (x - y) + (y - z) = m + n$

$\Longrightarrow x - z = m + n$ (ஒரு முழு எண்)

$\Longrightarrow x\,R\,z$ [R-ன் வரையறைப் படி]

எனவே, 7–6·1-ன் படி, R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

ஆகவே, R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

'ஒருங்கிசைவு மட்டு m' என்பது Z-ல் ஒரு சிறப்பான தொடர்பு எனக் குறிப்பிட்டிருந்தோம். அதன் சிறப்பிற்கு ஒரு காரணம் அது ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என்பதாகும். சமத்துவத் தொடர்புகளின் பண்புகளை நன்ருகப் புரிந்துகொள்ள 'ஒருங்கிசைவு மட்டு m' மிகுந்த துணை செய்யும். இது அதன்

சிறப்பிற்கு இரண்டாவது காரணம். முதலில் அது ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுவோம்.

8–1·4. தேற்றம்

'ஒருங்கிசைவு மட்டு m' Z-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

நிறுவல் :

$\forall\, x \in Z, \quad x - x = 0 = 0.m$

$\therefore \quad \forall\, x \in Z, \quad x \equiv x$ (மட்டு m) [6–3·10-ன் படி]

எனவே, '$\equiv$ மட்டு m' Z-ல் பிரதிபலிப்பது [7–2·1-ன் படி]

$x \equiv y$ (மட்டு m)

$\Longrightarrow x - y = Km,\ K \in Z$ [6–3·10-ன் படி]

$\Longrightarrow y - x = (-K)\,m, \quad -K \in Z$

$\Longrightarrow y \equiv x$ (மட்டு m)

எனவே, '$\equiv$ மட்டு m' Z-ல் சமச்சீரானது [7–4·1-ன் படி]

$[x \equiv y$ (மட்டு m) $\wedge\ y \equiv z$ (மட்டு m)$]$

$\Longrightarrow x - y = Km \wedge y - z = l\,m, \quad K \in Z, \quad l \in Z$ [6–3·10-ன் படி]

$\Longrightarrow (x - y) + (y - z) = Km + lm$

$\Longrightarrow x - z = (K + l)\,m, \quad K + l \in Z$

$\Longrightarrow x \equiv z$ (மட்டு m) [6–3·10-ன் படி]

எனவே, '$\equiv$ மட்டு m' Z-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு. [7–6·1-ன் படி]

ஆகவே, '$\equiv$ மட்டு m' Z-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

8–2. மாதிரிக் கணக்குகள்

8–2·1. மாதிரிக் கணக்கு

ஒரு தளத்திலுள்ள எல்லா முக்கோணங்களின் கணத்தில் 'சர்வசமம் ($\equiv$)' ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

(மதுரை ப.க. 1972 ஏப்ரல்)

(மீரட் ப.க. 1970)

ஒரு தளத்திலுள்ள எல்லா முக்கோணங்களின் கணத்தை T என்க. அப்பொழுது

$\forall \triangle ABC \in T, \quad \triangle ABC \equiv \triangle ABC$

எனவே, 7–2·1-ன் படி, '≡' என்பது T-ல் பிரதிபலிப்பது.

$[\triangle ABC, \triangle DEF \in T, \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF]$

$\Longrightarrow AB = DE, \quad BC = EF, \quad AC = DF$

$\Longrightarrow DE = AB, \quad EF = BC, \quad DF = AC$

$\Longrightarrow \triangle DEF \equiv \triangle ABC$

எனவே, 7–4·1-ன் படி, '≡' என்பது T-ல் சமச்சீரானது

$[\triangle ABC, \triangle DEF, \triangle LMN \in T, \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF \wedge \triangle DEF \equiv \triangle LMN]$

$\Longrightarrow [AB = DE, BC = EF, AC = DF] \wedge [DE = LM, EF = MN, DF = LN]$

$\Longrightarrow AB = LM, \ BC = MN, \ AC = LN$

$\Longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle LMN$

எனவே, 7–6·1-ன் படி, '≡' என்பது T-ல் ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு.

ஆகவே, '≡' என்பது T-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

8–2·2. மாதிரிக் கணக்கு

$N \times N$-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$(a, b) R (c, d) \Longleftrightarrow a + d = c + b$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. (கான்பூர் ப.க. 1970)

$\forall (a, b) \in N \times N, \quad a + b = a + b$

$\therefore \ (a, b) R (a, b)$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$\therefore$ R ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு [7–2·1-ன் படி]

$[(a, b), (c, d) \in N \times N, \ (a, b) R (c, d)]$

$\Longrightarrow a + d = c + b$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow c + b = a + d$

$\Longrightarrow (c, d) \ R \ (a, b)$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$\therefore$ R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு. [7–4·1-ன் படி]

$\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in N \times N,\ (a, b)\, R\, (c, d) \wedge (c, d)\, R\, (e, f)]$

$\Longrightarrow a + d = c + b \wedge c + f = e + d$

[R-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow (a + d) + (c + f) = (c + b) + (e + d)$

$\Longrightarrow a + f = b + e$

$\Longrightarrow a + f = e + b$

$\Longrightarrow (a, b)\, R\, (e, f)$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$\therefore$ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு [7–6·1-ன் படி]

$\therefore$ R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு

8–2·3. மாதிரிக் கணக்கு

கணம் A-ல் முற்றொருமைத் தொடர்பு I_A ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. (கோரக்பூர் ப. க. 1970)

$I_A \subset I_A$ [2–5·3-ன் படி]

$\therefore$ I_A ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு [7–2·2-ன் படி]

$(x, x) \in I_A \Longleftrightarrow (x, x) \in I_A^{-1}$ [6–6·1-ன் படி]

$\therefore$ $I_A = I_A^{-1}$ [2–3 2-ன் படி]

$\therefore$ I_A ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு. [7–4·2-ன் படி]

$\forall x, y, z \in A,\ (x, y) \in I_A \wedge (y, z) \in I_A$

$\Longrightarrow x = y \wedge y = z$ [7–1·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x = z$

$(x, z) \in I_A$ [7–1·2-ன் படி]

$\therefore$ I_A ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு. [7–6·1-ன் படி]

$\therefore$ I_A ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

8–2·4. மாதிரிக் கணக்கு

R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு சமத்துவத் தொடர்புகள் எனில், $R \cap R'$ என்பதும் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

(மீரட் ப. க. 1969)

எடுகோள்படி, R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு தொடர்புகள்.

$\therefore \quad R \subset A \times A, \quad R' \subset A \times A$ [6–3·4-ன் படி]

$\therefore \quad R \cap R' \subset A \times A$

$\therefore \quad R \cap R'$ என்பது A-ல் ஒரு தொடர்பு. [6–3·4-ன் படி]

எடுகோள்படி, R, R' என்பன சமத்துவத் தொடர்புகள்.

$\therefore \quad R, R'$ என்பன பிரதிபலிப்பவை. [8–1·1-ன் படி]

$\therefore \quad \forall\, x \in A, \ (x, x) \in R \wedge (x, x) \in R'$ [7–2·1-ன் படி]

$\therefore \quad \forall\, x \in A, \ (x, x) \in R \cap R'$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad R \cap R'$ ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு. [7–2·1-ன் படி]

$[\, x, y \in A, \ (x, y) \in R \cap R']$

$\Longrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in R'$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \in R'$ [$\because$ எடுகோள் படி R, R' சமச்சீரானவை]

$\Longrightarrow (y, x) \in R \cap R'$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad R \cap R'$ ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு. [7–4·1-ன் படி]

$[x, y, z \in A, \ (x, y) \in R \cap R' \wedge (y, z) \in R \cap R']$

$\Longrightarrow [\, (x, y) \in R \wedge (x, y) \in R']$
$\qquad \wedge \ [(y, z) \in R \wedge (y, z) \in R']$
[3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow [\, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\,]$
$\qquad \wedge \ [\, (x, y) \in R' \wedge (y, z) \in R']$
[1–10·12(a) மற்றும் 1–10·18(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, z) \in R \wedge (x, z) \in R'$ [$\because$ எடுகோள் படி, R, R' டிரான்சிட்டிவ் தொடர்புகள்]

$\Longrightarrow (x, z) \in R \cap R'$ [3–3·2-ன் படி]

$\therefore \quad R \cap R'$ ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு. [7–6·1-ன் படி]

$\therefore \quad R \cap R'$ ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

8–2·5. மாதிரிக் கணக்கு

பூச்சியம் (zero) நீங்கிய விகிதமுறு எண் கணம் A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow x = \frac{1}{y}$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பல்ல என நிறுவுக.

$2 \in A,\ 2 \neq \frac{1}{2}.$

∴ R-ன் வரையறைப் படி, $2 \not R\, 2$

எனவே, 7–2·11-ன் படி, R ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பல்ல.

∴ R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பல்ல.

8–2·6. மாதிரிக் கணக்கு

மெய் எண் கணம் A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow 1 + xy > 0$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பல்ல என நிறுவுக.

$1 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

∴ $2\,R\left(-\frac{1}{4}\right)$ ... (1) [R-ன் வரையறைப் படி]

$1 + \left(-\frac{1}{4}\right)(-8) = 1 + 2 = 3 > 0$

∴ $\left(-\frac{1}{4}\right) R\,(-8)$ ... (2) [R-ன் வரையறைப் படி]

$1 + 2(-8) = 1 - 16 = -15 \not> 0$

∴ $2 \not R\,(-8)$ ... (3) [R-ன் வரையறைப் படி]

(1), (2), (3)-லிருந்து, $2\,R\left(-\frac{1}{4}\right) \wedge \left(-\frac{1}{4}\right) R\,(-8)$ ஆனால் $2 \not R\,(-8)$

∴ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு.

[7–6·11-ன் படி]

∴ R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பல்ல.

பயிற்சி 8 (அ)

1. ஒரு தளத்திலுள்ள எல்லா முக்கோணங்களின் கணத்தில் 'வடிவொப்புமை '(|||)' என்பது ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. (மீரட் ப. க. 1970)
(ஆக்ரா ப. க. 1971)

2. முழு எண் கணம் Z-ல் R என்ற தொடர்பானது

$x\,R\,y \Longleftrightarrow x - y$ ஆனது 5 ஆல் வகுபடுகிறது

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. (கான்பூர் ப. க 1968, 1969)
(மீரட் ப. க. 1969)

3. முழு எண் கணம் Z-ல் R என்ற தொடர்பானது $x\,R\,y \Longleftrightarrow x, y$ என்பவை இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் அல்லது இரண்டும் இரட்டை எண்கள் என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

4. A என்பது மெய் எண் கணம் என்க. $A \times A$-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$(a, b)\ R\,(c, d) \Longleftrightarrow a + b = c + d$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

5. $N \times N$-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$(a, b)\ R\,(c, d) \Longleftrightarrow a\,d = b\,c$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

6. A என்பது ஒரு கணம் எனில், $A \times A$ என்பது A-ல் ஒரு ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

7. கணம் A-ல் மிகச் சிறிய சமத்துவத் தொடர்பு யாது ?

8. கணம் A-ல் மிகப் பெரிய சமத்துவத் தொடர்பு யாது?

9. R என்பது கணம் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு எனில், R^{-1} என்பதும் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

10. R, R' என்பன கணம் A-ல் இரு சமத்துவத் தொடர்புகள் எனில், $R \cup R'$ என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பாக இருக்க வேண்டியதில்லை என நிறுவுக.
(மீரட் ப. க. 1969)

11. கணம் A-ல் R என்ற தொடர்பு டிரான்சிட்டிவ் ஆனது மற்றும் பிரதிபலிப்பது. A-ல் $\sim$ என்ற தொடர்பானது

$$x \sim y \Longleftrightarrow x\,R\,y \wedge y\,R\,x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $\sim$ ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக.

12. முழு எண் கணம் Z-ல் R என்ற தொடர்பானது $x\,R\,y \Longleftrightarrow x, y$ என்பவை இரண்டும் ஒற்றை எண்கள் என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர் பல்ல என நிறுவுக.

13. A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணக் குடும்பம். A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$B\,R\,C \Longleftrightarrow B \subset C$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு சமத்துவத் தொடர் பல்ல என நிறுவுக.

14. மெய் எண் கணம் A-ல் சில தொடர்புகள் R கீழே தரப் பட்டுள்ளன. அவற்றுள் எவை சமத் தொர்டர்புகள் எனக் கூறுக.

(a) $x\,R\,y \Longleftrightarrow |x| = |y|$ (மீரட் ப. க. 1967)

(b) $x\,R\,y \Longleftrightarrow |x| \geqslant |y|$

(c) $x\,R\,y \Longleftrightarrow x - y \geqslant 0$ (மீரட் ப. க. 1967)

விடைகள்

7. I_A

8. $A \times A$

14. (a) சமத்துவத் தொடர்பு

(b) சமத்துவத் தொடர்பல்ல

(c) சமத்துவத் தொடர்பல்ல

8·3. சமத்துவ உறுப்பும் சமத்துவ இனமும் (Equivalent Element and Equivalent Class)

8–3·1. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என்க. $x, y \in A$, $x\,R\,y$ எனில், அப்பொழுது x என்பது y-க்கு R-சமத்துவமானது [x is R–equivalent to y] என்கிறோம்.

8–3·2. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு, a என்பது A-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு என்க. அப்பொழுது A-ல் a-க்கு R-சமத்துவமான (R–equivalent) உறுப்புகள் அனைத்தையும் மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை a-ன் சமத்துவ இனம் (equivalent class of a) அல்லது a-ன் சமத்துவக் கணம் (equivalent set of a) என்கிறோம். இதைப் பொதுவாக $[a]$ ஆல் குறிக்கிறோம். சிலர் இதை $\overline{a}$ அல்லது A_a என்றும் எழுதுகிறார்கள். குறியீட்டில்

$$[a] = \{ x \in A \mid x R a \}$$

சுருக்கமாக, $[a] = \{ x \mid x R a \}$

அதாவது, $[a] = \{ x \mid (x, a) \in R \}$

எனவே,

8–3·3. $[a] \subset A$

அடுத்து, சமத்துவ இனங்களுக்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள் பார்ப்போம்.

8–3·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 2, 3 \}$, $R = \{ (1, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3) \}$ எனில், அப்பொழுது R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

இப்பொழுது $1 R 1$, $2 R 3$, $3 R 2$, $2 R 2$, $3 R 3$.

$[1] = \{ x \mid x R 1 \} = \{ 1 \}$ [8–3·2-ன் படி]

$[2] = \{ x \mid x R 2 \} = \{ 3, 2 \}$

$[3] = \{ x \mid x R 3 \} = \{ 2, 3 \}$

8–3·5. எடுத்துக்காட்டு

Z-ல் ஒருங்கிசைவு (மட்டு 5) என்ற சமத்துவத் தொடர்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இது சமத்துவ உறுப்பு, சமத்துவ இனம் என்ற இரு கருத்துகளையும் நன்றாகப் புரிந்துகொள்ளத் துணை செய்யும்.

$$Z = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

$[0] = \{ x \mid x \equiv 0$ (மட்டு 5)$\}$ [8–3·2-ன் படி]

$= \{x \mid x - 0 = 5K,\ K \in Z\}$ [6–3·10-ன் படி]

$= \{x \mid x = 5K,\ K \in Z\}$

$= \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

$[1] = \{x \mid x \equiv 1$ (மட்டு 5)$\}$ [8–3·2-ன் படி]

$= \{x \mid x - 1 = 5K,\ K \in Z\}$ [6–3·10-ன் படி]

$= \{x \mid x = 5K + 1,\ K \in Z\}$

$= \{\ldots, -14, -9\ -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$

இதேபோன்று,

$[2] = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$

$[3] = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$

$[4] = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$

$[5] = \{\ldots, -10, -5, -0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

$[6] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$

... ...

... ...

... ...

$[-1] = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$

$[-2] = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$

... ...

... ...

மேலே எழுதப்பட்டுள்ள சமத்துவ இனங்களை ஆழ்ந்து நோக்கினல், கீழ்க்கண்ட உண்மைகள் விளங்கும்.

1. $\ldots = [-10] = [-5] = [0] = [5] = [10] = \ldots$

$\ldots = [-9] = [-4] = [1] = [6] = [11] = \ldots$

$\ldots = [-8] = [-3] = [2] = [7] = [12] = \ldots$

$\ldots = [-7] = [-2] = [3] = [8] = [13] = \ldots$

$\ldots = [-6] = [-1] = [4] = [9] = [14] = \ldots$

எனவே, மொத்தத்தில் 5 வெவ்வேறான சமத்துவ இனங்கள்தாம் உள்ளன. அவை $[0], [1], [2], [3], [4]$ ஆகும்.

2. Z-ன் ஓர் உறுப்பு மற்றோர் உறுப்பின் சமத்துவ இனத்தில் இருந்தால், அப்பொழுது அந்த இரு உறுப்புகளும் சமத்துவமானவை. சான்றாக, $16 \in [1]$, $16 \equiv 1$ (மட்டு 5).

3. Z-ன் இரு உறுப்புகள் சமத்துவமாக இருந்தால், அப்பொழுது அவற்றின் சமத்துவ இனங்கள் சமம். சான்றாக, $-8 \equiv 12$ (மட்டு 5), $[-8] = [12]$.

4. Z-ல் உள்ள இரு உறுப்புகளின் சமத்துவ இனங்கள் பொது உறுப்பில் கணங்கள் எனில், அப்பொழுது அவை இரண்டும் சமத்துவமற்றவை. சான்றாக, $[3] \cap [4] = \phi$, $3 \not\equiv 4$ (மட்டு 5).

5. இரு சமத்துவ இனங்கள் சமமாக இல்லாவிட்டால், அப்பொழுது அவை இரண்டும் பொது உறுப்பில் கணங்கள். சான்றாக, $[2] \neq [5]$, $[2] \cap [5] = \phi$.

6. (a) ஒவ்வொரு சமத்துவ இனமும் Z-ன் ஒரு வெற்றற்ற, உட்கணம்.

(b) $[0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4] = Z$. அதாவது எல்லாச் சமத்துவ இனங்களின் கூட்டு Z ஆகும்.

(c) $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$ என்ற ஐந்து சமத்துவ இனங்களும் ஒன்றுக்கொன்று பொது உறுப்பில் கணங்கள் (mutually disjoint sets).

இந்த அழகிய எடுத்துக்காட்டானது அடுத்து நிறுவப்பட இருக்கும் சமத்துவ இனங்களின் பண்புகளை நினைவிற் கொள்ளத் துணை செய்யும். இது தவிர, 6 (a), (b), (c) என்ற மூன்றும் பிரிவினை (partition) என்ற கருத்தை மிகத் தெளிவாக விளக்குகின்றன.

8–3·6. தேற்றம்

R என்பது கணம் A-ல் ஏதேனுமொரு சமத்துவத் தொடர்பு, $a, b, c, d \in A$ எனில், அப்பொழுது

(i) $a \in [a]$

(ii) $a \in [b] \Longleftrightarrow a\,R\,b$

(iii) $a \notin [b] \Longleftrightarrow a \not R\, b$

(iv) $a\,R\,b \Longleftrightarrow [a] = [b]$

(v) $a \not R b \iff [a] \neq [b]$

(vi) $[a] \cap [b] \neq \phi \iff [a] = [b]$

(vii) $[a] \cap [b] = \phi \iff [a] \neq [b]$

(viii) $[\, c \in [a],\ d \in [b],\ [a] \neq [b]\,] \Longrightarrow c \not R d$.

நிறுவல் :

(i) R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு. (எடுகோள்)

$\therefore$ R பிரதிபலிப்பது

$\therefore$ $a R a$ [7–2·1-ன் படி]

ஆனல் $[a] = \{ x \mid x R a \}$ [8–3·2-ன் படி]

$\therefore$ $a \in [a]$

(ii) பாகம் 1 :

$a \in [b] \Longrightarrow a R b$ என நிறுவ வேண்டும்.

$a \in [b]$ (எடுகோள்)

ஆனல் $[b] = \{ x \mid x R b \}$ [8–3·2-ன் படி]

$\therefore$ $a R b$

பாகம் 2 :

$a R b \Longrightarrow a \in [b]$ என நிறுவ வேண்டும்.

$a R b$ (எடுகோள்)

ஆனல், $[b] = \{ x \mid x R b \}$ [8–3·2-ன் படி]

$\therefore$ $a \in [b]$

(iii) (ii)-லிருந்து $a \in [b] \longleftrightarrow a R b$ என்பது ஓர் அளவையியல் உண்மை. [1–10·4-ன் படி]

எனவே, 1–10·14-ன் படி, $a \notin [b] \longleftrightarrow a \not R b$ என்பதும் ஓர் அளவையியல் உண்மை.

$\therefore$ $a \notin [b] \longleftrightarrow a \not R b$ [1–10·4-ன் படி]

(iv) பாகம் 1 :

$a R b \Longrightarrow [a] = [b]$ என நிறுவ வேண்டும்.

$a R b$ (எடுகோள்)

$x \in [a]$ என்க.

அப்பொழுது $x\,R\,a$ [(ii)-ன் படி]

ஆனால் $a\,R\,b$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $x\,R\,a \wedge a\,R\,b$

$\therefore$ $x\,R\,b$ [$\because$ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு]

$\therefore$ $x \in [b]$ [(ii)-ன் படி]

இந்த விதமாக, $x \in [a] \Longrightarrow x \in [b]$

$\therefore$ $[a] \subset [b]$ ... (அ) [2–5·2-ன் படி]

$y \in [b]$ என்க.

அப்பொழுது $y\,R\,b$ [(ii)-ன் படி]

ஆனால், $a\,R\,b$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $b\,R\,a$ [$\because$ R சமச்சீரானது]

$\therefore$ $y\,R\,b \wedge b\,R\,a$

$\therefore$ $y\,R\,a$ [$\because$ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு]

$\therefore$ $y \in [a]$ [(ii)-ன் படி]

இந்த விதமாக, $y \in [b] \Longrightarrow y \in [a]$

$\therefore$ $[b] \subset [a]$ ...(ஆ) [2–5·2-ன் படி]

எனவே, (அ), (ஆ) -விருந்து $[a] = [b]$ [2–5·11-ன் படி]

பாகம் 2 :

$[a] = [b] \Longrightarrow a\,R\,b$ என நிறுவ வேண்டும்.

$[a] = [b]$ (எடுகோள்)

$a \in [a]$ [(i)-ன் படி]

$\therefore$ $a \in [b]$ [எடுகோள் படி]

$\therefore$ $a\,R\,b$ [(ii)-ன் படி]

(v) (iv)-விருந்து, $a\,R\,b \longleftrightarrow [a] = [b]$ என்பது ஓர் அளவையியல் உண்மை. [1–10·4-ன் படி]

எனவே, 1–10·14-ன் படி, $a \not R\, b \longleftrightarrow [a] \neq [b]$ என்பதும் ஓர் அளவையியல் உண்மை.

$\therefore$ $a \not R\, b \Longleftrightarrow [a] \neq [b]$ [1–10·4-ன் படி]

(vi) பாகம் 1 :

$[a] \cap [b] \neq \phi \Longrightarrow [a] = [b]$ என நிறுவ வேண்டும்.

$[a] \cap [b] \neq \phi \Longrightarrow \exists\, x \in [a] \cap [b]$

$\Longrightarrow x \in [a] \wedge x \in [b]$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x\,R\,a \wedge x\,R\,b$ [(ii)-ன் படி]

$\Longrightarrow a\,R\,x \wedge x\,R\,b$ [$\because$ R சமச்சீரானது]

$\Longrightarrow a\,R\,b$ [$\because$ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு]

$\Longrightarrow [a] = [b]$ [(iv)-ன் படி]

பாகம் 2 :

$[a] = [b] \Longrightarrow [a] \cap [b] \neq \phi$ என நிறுவ வேண்டும்.

$[a] = [b]$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $[a] \cap [b] = [b] \cap [b]$ [4–2·4 (b)-ன் படி]

$= [b]$

$\neq \phi$ [$\because$ (i)-ன் படி $b \in [b]$]

(vii) (vi)-லிருந்து, $[a] \cap [b] \neq \phi \longleftrightarrow [a] = [b]$ என்பது ஓர் அளவையியல் உண்மை. [1–10·4-ன் படி]

எனவே, 1–10·14-ன் படி, $[a] \cap [b] = \phi \longleftrightarrow [a] \neq [b]$ என்பதும் ஓர் அளவையியல் உண்மை.

$\therefore$ $[a] \cap [b] = \phi \Longleftrightarrow (a) \neq [b]$ [1–10·4-ன் படி]

(viii) $c \in [a]$, $d \in [b]$, $[a] \neq [b]$ (எடுகோள்)

$c \in [a] \wedge d \in [b]$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $c\,R\,a \wedge d\,R\,b$ [(ii)-ன் படி]

$\therefore$ $[c] = [a] \wedge [d] = [b]$ [(iv)-ன் படி]

ஆனல், $[a] \neq [b]$ (எடுகோள்)

$\therefore$ $[c] \neq [d]$

$\therefore$ $c \not R\, d$ [(v)-ன் படி]

8-3·7. கருத்துரை

8-3·6 (vi), 8-3·6 (vii) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$\forall\, a, b \in A$, $[a] = [b]$, அல்லாவிட்டால் $[a] \cap [b] = \phi$.

8-4. பிரிவினையும் சமத்துவத் தொடர்பும்

8-4·1. வரையறை

$\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது கணம் A-ன் உட்கணங்களால் ஆன ஒரு குறியிடப்பட்ட கணக் குடும்பம் என்க. அப்பொழுது,

(i) $A_i \neq \phi$, $\forall\, i \in I$

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

(iii) $\forall\, i, j \in I$, $A_i = A_j$, அல்லாவிட்டால் $A_i \cap A_j = \phi$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், $\{A_i\}_{i \in I}$ ஐ A-ன் ஒரு பிரிவினை (partition) என்கிறோம்.

அடுத்து, பிரிவினைக்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள் பார்ப்போம்.

8-4·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $I = \{a, b, c, d\}$, $A_a = \{3, 1\}$, $A_b = \{7, 2, 5\}$, $A_c = \{4, 9, 10, 6\}$ $A_d = \{8\}$ எனில், அப்பொழுது $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை.

8-4·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $I = \{0, e\}$,

$A_0 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $A_e = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ எனில், அப்பொழுது $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை.

8-4·4. தேற்றம்

கணம் A-ல் எந்த ஒரு சமத்துவத் தொடர்பும் A ஐப் பிரிவினை செய்கிறது. மறுதலையாக, A-ன் எந்த ஒரு பிரிவினையும் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பை வரையறுக்கிறது.

நிறுவல் :

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு,

$P = \{ [a] \mid a \in A \}$ என்க.

அப்பொழுது, 8–3·3-ன் படி, $\forall a \in A, [a] \subset A$.

எனவே, P என்பது A-ன் உட்கணங்களால் ஆன கணக் குடும்பம்.

$\forall a \in A, \; a \in [a]$ [8–3 6 (i)-ன் படி]

$\therefore \; \forall a \in A, \; [a] \neq \phi$ ... (1)

மறுபடியும், $\forall a \in A, a \in [a]$. எனவே, A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் குறைந்தது ஒரு சமத்துவ இனத்திலாவது இருக்கிறது. ஆகவே,

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A \qquad \dots (2)$$

8–3·7-ன் படி $\forall a, b \in A$,

$[a] = [b]$, அல்லாவிட்டால் $[a] \cap [b] = \phi$ ... (3)

(1), (2), (3)-லிருந்து, P என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை.

இந்த விதமாக, A-ல் R என்ற சமத்துவத் தொடர்பு A-ன் சமத்துவ இனங்களால் ஆன பிரிவினையை ஏற்படுத்துகிறது.

மறுதலை :

$Q = \{ A_i \}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை என்க.

கணம் A-ல் R என்ற தொடர்பைக் கீழ்க் காணுமாறு வரையறுக்க.

$a \, R \, b \iff \exists A_j \in Q \ni a \in A_j \wedge b \in A_j$ ... (4)

Q என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை (தற்கோள்)

$\therefore \; A = \bigcup_{i \in I} A_i$ [8–4·1(ii)-ன் படி]

$\therefore \; a \in A \implies a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ [2–3·2-ன் படி]

$\implies \exists A_j \in Q \ni a \in A_j$ [4–4.1-ன் படி]

$\Longrightarrow a \in A_j \wedge a \in A_j$ [1–10·11(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow a\,R\,a$ [(4)-ன் படி]

$\therefore$ R ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு [7–2·1-ன் படி]

$a\,R\,b \Longrightarrow \exists A_j \in Q \ni a \in A_j \wedge b \in A_j$ [(4)-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists A_j \in Q \ni b \in A_j \wedge a \in A_j$ [1–10·12(a)-ன் படி]

$\Longrightarrow b\,R\,a$ [(4)-ன் படி]

$\therefore$ R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு [7–4·1-ன் படி]

$[a\,R\,b \wedge b\,R\,c]$

$\Longrightarrow [\exists A_j \in Q \ni a \in A_j \wedge b \in A_j]$
$\wedge [\exists A_k \in Q \ni b \in A_k \wedge c \in A_k]$ [(4)-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists A_j, A_k \in Q \ni b \in A_j \wedge b \in A_k$

$\Longrightarrow \exists A_j, A_k \in Q \ni b \in A_j \cap A_k$ [3–3·2-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists A_j, A_k \in Q \ni A_j \cap A_k \neq \phi$

$\Longrightarrow A_j = A_k$ [8–4·1(iii)-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists A_j \in Q \ni a \in A_j \wedge c \in A_j$

$\Longrightarrow a\,R\,c$ [(4)-ன் படி]

$\therefore$ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு. [7–6·1-ன் படி]

$\therefore$ R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

இந்த விதமாக, A-ன் ஒரு பிரிவினையான Q, கணம் A-ல் R என்ற சமத்துவத் தொடர்பை வரையறுக்கிறது.

8–4·5. வரையறை

R என்பது கணம் A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு எனில், அப்பொழுது R ஆல் ஏற்படும் A-ன் எல்லாச் சமத்துவ இனங்களால் மட்டும் ஆன கணக் குடும்பத்தை, R ஆல் கிடைக்கும் A-ன் ஈவுக் கணம் (quotient set) என்கிறோம்.

இதை A/R எனக் குறிக்கிறோம். குறியீட்டில்,

$$A/R = \{ [a] \mid a \in A \}$$

ஈவுக் கணம் என்ற கருத்து உயர் கணிதத்தில் பல இடங்களில் பயன்படுகிறது.

அடுத்து ஈவுக் கணத்திற்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள் பார்ப்போம்.

8–4·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2)\}$ எனில், R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

$$[1] = \{x \mid (x, 1) \in R\} = \{1\}$$
$$[2] = \{x \mid (x, 2) \in R\} = \{2, 3\}$$
$$[3] = \{x \mid (x, 3) \in R\} = \{3, 2\} = [2]$$
$$[4] = \{x \mid (x, 4) \in R\} = \{4\}$$
$$A/R = \{[a] \mid a \in A\} = \{[1], [2], [3], [4]\}$$
$$= \{[1], [2], [4]\}$$

8–4·7. எடுத்துக்காட்டு

R என்பது Z-ல் 'ஒருங்கிசைவு மட்டு 5' என்ற சமத்துவத் தொடர்பைக் குறித்தால், அப்பொழுது, 8–3·5-ன் படி, மொத்தத்தில் $[0], [1], [2], [3], [4]$ என்ற ஐந்து வெவ்வேறுன சமத்துவ இனங்கள் தாம் உள்ளன. எனவே,

$$Z/R = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

8–5. மாதிரிக் கணக்குகள்

8–5·1. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1)\}$ எனில், R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. A-லுள்ள உறுப்புகளின் சமத்துவ இனங்களைக் காண்க. மொத்தத்தில் எத்தனை வெவ்வேறுன சமத்துவ இனங்கள் உள்ளன ?

$$I_A \subset R$$

$\therefore$ R ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு [7–2·2-ன் படி]

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (2, 3), (4, 1), (1, 4)\} = R$$

$\therefore$ R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு [7–4·2.ன் படி]

$R \circ R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 4)$
$(4, 1)\} \subset R$

$\therefore$ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு [7–6·2-ன் படி]

$\therefore$ R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு

$[1] = \{x \mid (x, 1) \in R\} = \{1, 4\}$

$[2] = \{x \mid (x, 2) \in R\} = \{2, 3\}$

$[3] = \{x \mid (x, 3) \in R\} = \{3, 2\}$

$[4] = \{x \mid (x, 4) \in R\} = \{4, 1\}$

$\therefore$ $[1] = [4]$, $[2] = [3]$

எனவே, இரண்டு வெவ்வேறான சமத்துவ இனங்களே உள்ளன.

8–5·2. மாதிரிக் கணக்கு

$N \times N$-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff ad = bc$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R என்பது ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. $(2, 3)$-ன் சமத்துவ இனத்தைக் காண்க.

$\forall\, (a, b) \in N \times N,\ ab = ba$

$\therefore$ $\forall\, (a, b) \in N \times N,\ (a, b)\, R\, (a, b)$
[R-ன் வரையறைப் படி]

$\therefore$ R ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு [7–2·1-ன் படி]

$(a, b)\, R\, (c, d) \implies ad = bc$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$\implies cb = da$

$\implies (c, d)\, R\, (a, b)$
[R ன் வரையறைப் படி]

$\therefore$ R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு

$[(a, b)\, R\, (c, d) \wedge (c, d)\, R\, (e, f)]$

$\implies ad = bc \wedge cf = de$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$\implies adcf = bcde$

$\implies af = be$

$\implies (a, b)\, R\, (e, f)$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$\therefore$ R ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு [7–6·1-ன் படி]

$\therefore$ R ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு

$[(2, 3)] = \{(x, y) \mid (x, y) R (2, 3)\}$ [8–3·2-ன் படி]

$= \{(x, y) \mid 3x = 2y\}$ [R-ன் வரையறைப் படி]

$= \{(2, 3), (4, 6), (6, 9), (8, 12), \ldots \ldots\}$

8–5·3. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $I = \{a, b, c\}$, $A_a = \{1, 5\}$, $A_b = \{2, 4, 7\}$, $A_c = \{3, 6\}$ எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை எனக் காட்டுக.

$A_a \subset A$, $A_b \subset A$, $A_c \subset A$

$\therefore \forall i \in I, \; A_i \subset A$ ... (1)

$A_a \neq \phi$, $A_b \neq \phi$, $A_c \neq \phi$

$\therefore \forall i \in I, \; A_i \neq \phi$ ... (2)

$\bigcup_{i \in I} A_i = A_a \cup A_b \cup A_c = \{1, 5, 2, 4, 7, 3, 6\}$

$= A$ ... (3)

$A_a \neq A_b$, $A_a \neq A_c$, $A_b \neq A_c$

$A_a \cap A_b = A_b \cap A_a = \phi$

$A_a \cap A_c = A_c \cap A_a = \phi$

$A_b \cap A_c = A_c \cap A_b = \phi$

$\therefore \forall i, j \in I$, $A_i = A_j$ அல்லாவிட்டால்

$A_i \cap A_j = \phi$ ... (4)

(1), (2), (3), (4)-லிருந்து,

$\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை.

8–5·4. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $I = \{a, b, c\}$, $A_a = \{1, 2, 5\}$, $A_b = \{4, 9\}$, $A_c = \{3, 6, 8\}$ எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை அல்ல என நிறுவுக.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_a \cup A_b \cup A_c$$

$$= \{ 1, 2, 5, 4, 9, 3, 6, 8 \} \neq A$$

எனவே, பிரிவினையின் வரையறை 8—4·1-ல், (ii) ஆவது நிபந்தனை பொருந்தவில்லை. ஆகவே,

$\{ A_i \}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை அல்ல.

8–5·5. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{ a, b, c \}$ என்ற கணத்தின் எல்லாப் பிரிவினைகளையும் எழுதுக.

$\{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$, $\{ \{a\}, \{b, c\} \}$, $\{ \{b\}, \{a, c\} \}$, $\{ \{c\}, \{a, b\} \}$, $\{ \{a, b, c\} \}$ என்ற ஐந்து கணக் குடும்பங்கள் மட்டுமே A-ன் பிரிவினைகள்.

8–5 6. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{ a, b, c, d \}$ என்ற கணத்தின் ஒரு பிரிவினையான $P = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ ஆல் A-ல் வரையறுக்கப்படும் சமத்துவத் தொடர்பு R ஐக் காண்க.

P-ன் உறுப்பு ஒவ்வொன்றிலும் A-ன் உறுப்பு ஒன்றுதான் உள்ளது. எனவே, R என்ற சமத்துவத் தொடர்பானது,

$x \, R \, y \iff x = y$ என வரையறுக்கப்படும்.

$\therefore \quad R = I_A$.

8–5·7. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 \}$ என்க. A-ல் R என்ற தொடர்பானது,

$x \, R \, y \iff x - y$ ஆனது 4 ஆல் வகுபடுகிறது என வரையறுக்கப்பட்டால், A/R ஐக் காண்க.

$$[1] = \{1, 5, 9\} = [5] = [9]$$

$$[2] = \{2, 6\} = [6]$$

$$[3] = \{3, 7, 11\} = [7] = [11]$$

$$[4] = \{4\}$$

$$\therefore \quad A/R = \{ [1], [2], [3], [4] \}$$

பயிற்சி 8 (ஆ)

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 5), (5, 2), (1, 4), (4, 1)\}$ எனில் R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. A-லுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் சமத்துவ இனத்தைக் காண்க.

2. $N \times N$-ல் R என்ற சமத்துவத் தொடர்பானது,

$(a, b) R (c, d) \iff a + d = c + b$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $[(1, 4)]$ ஐக் காண்க.

3. $N \times N$-ல் R என்ற சமத்துவத் தொடர்பானது,

$(a, b) R (c, d) \iff ad = bc$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $[(5, 2)]$ ஐக் காண்க.

4. கணம் A-ல் R என்ற சமத்துவத் தொடர்பானது, $R = I_A$ என வரையறுக்கப்பட்டால், A-லுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் சமத்துவ இனத்தையும் காண்க.

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $I = \{a, b, c, d\}$, $A_a = \{1, 3\}$, $A_b = \{7, 4, 2\}$, $A_c = \{5\}$, $A_d = \{6, 9, 8\}$ எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை எனக் காட்டுக.

6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $A_\alpha = \{1, 4, 3\}$, $A_\beta = \{2, 5\}$, $A_\gamma = \{6, 10\}$

எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை அல்ல எனக் காட்டுக.

7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I = \{a, b, c\}$, $A_a = \{1, 3, 5\}$, $A_b = \{2, 4\}$, $A_c = \phi$ எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை அல்ல எனக் காட்டுக.

8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I = \{a, b, c\}$, $A_a = \{1, 3, 5\}$ $A_b = \{2, 5\}$, $A_c = \{4\}$ எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை அல்ல எனக் காட்டுக.

9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $I = \{a, b\}$, $A_a = \{1, 2, 5\}$ $A_b = \{3, 6, 7\}$ எனில், $\{A_i\}_{i \in I}$ என்பது A-ன் ஒரு பிரிவினை அல்ல எனக் காட்டுக.

10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ என்ற கணத்தின் எல்லாப் பிரிவினைகளையும் எழுதுக.

11. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ எனில், கீழ்வரும் ஒவ்வொரு கணக் குடும்பமும் A-ன் ஒரு பிரிவினையா, பிரிவினை அல்லவா எனக் கூறுக.

(a) $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}$

(b) $\{\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 6\}, \{4\}\}$

(c) $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

(d) $\{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3\}\}$

(e) $\{\{4, 6\}, \{1, 5, 7\}, \{2, 3\}\}$

(f) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

(g) $\{\{1, 6, 5\}, \{2, 4\}, \phi, \{3\}\}$

12. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1) (1, 3) (3, 1) (3, 2) (2, 3)$ எனில், R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு என நிறுவுக. A/R ஐக் காண்க.

13. $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 6), (7, 9), (9, 10), (10, 11)\}$-ல் R என்ற சமத்துவத் தொடர்பானது

$$(a, b) R (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், A / R ஐக் காண்க.

14. $A = \{2, 3, 4, 8, 11\}$ என்ற கணத்தின் ஒரு பிரிவினையான $P = \{\{2, 4, 8\}, \{3, 11\}\}$ ஆல் A-ல் வரையறுக்கப்படும் சமத்துவத் தொடர்பு R ஐக் காண்க.

15. $A = \{a, b, c\}$ என்ற கணத்தின் ஒரு பிரிவினையான $P = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ ஆல் A-ல் வரையறுக்கப்படும் சமத்துவத் தொடர்பு R ஐக் காண்க.

16. கீழ்வரும் கூற்றுகள் உண்மையா, பொய்யா எனக் கூறுக.

(a) கணம் A-ன் அடுக்குக் கணம் A-ன் ஒரு பிரிவினையாகும்.

(b) சமத்துவ இனங்கள் வெற்றுக் கணமாக இருக்கலாம்.

(c) R என்பது A-ல் ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு எனில், A-லுள்ள உறுப்புகளின் சமத்துவ இனங்கள் A/R-ன் உறுப்புகளாகும்.

(d) சில வெற்றற்ற கணங்களில் சமத்துவத் தொடர்புகளை வரையறுக்க முடியாது.

விடைகள்

1. $[1] = \{1, 4\} = [4], [2] = \{2, 5\} = [5], [3] = \{3\}$

2. $[(1, 4)] = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), \ldots\}$

3. $[(5, 2)] = \{(5, 2), (10, 4), (15, 6), (20, 8), \ldots\}$

4. $x \in A \Longrightarrow [x] = \{x\}$

10. $P_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$
$P_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
$P_3 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$
$P_4 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$
$P_5 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$
$P_6 = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$
$P_7 = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$
$P_8 = \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}$
$P_9 = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$

11. (a) இல்லை (b) ஆம் (c) ஆம் (d) இல்லை (e) இல்லை (f) ஆம் (g) இல்லை.

12. $A/R = \{[1], [4]\}$

13. $A/R = \{[(1, 2)], [(3, 2,)], [(4, 6)]\}$

14. $a R b \Longleftrightarrow 2 \mid (a - b)$

15. $R = I_A$

16. (a) பொ (b) பொ (c) உ (d) பொ

8·6. பகுதி வரிசைத் தொடர்பு (Partial Order Relation)

8–6·1. வரையறை

கணம் A-ல் R என்ற தொடர்புக்குப் பிரதிபலிக்கும் பண்பு, எதிர் சமச்சீர் பண்பு, டிரான்சிட்டிவ் பண்பு ஆகிய மூன்றும்

இருந்தால் இருந்தால்தான், R ஐ ஒரு பகுதி வரிசைத் தொடர்பு என்கிறோம்.

கீழ்வருபவை பகுதி வரிசைத் தொடர்பிற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

8–6·2. எடுத்துக்காட்டு.

$A = \{$ மெய் எண்கள் $\}$ என்க. அப்பொழுது

(i) $\forall\, a \in A,\ a \leqslant a$

(ii) $[\, a, b \in A,\ a \leqslant b \wedge b \leqslant a \,] \Longrightarrow a = b$

(iii) $[\, a, b, c \in A,\ a \leqslant b \wedge b \leqslant c \,] \Longrightarrow a \leqslant c$

எனவே, '$\leqslant$' என்பது A-ல் ஒரு பகுதி வரிசைத் தொடர்பு.

8·6–3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ என்க. அப்பொழுது

$I_A \subset I_A$ [2–5·3-ன் படி]

$\therefore$ I_A என்பது A-ல் ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு. [7–2·2-ன் படி]

$$I_A \cap I_A^{-1} = I_A \cap I_A = I_A \subset I_A$$

$\therefore$ I_A ஓர் எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு. [7–8·2-ன் படி]

$$I_A \circ I_A = I_A \subset I_A$$

$\therefore$ I_A ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு [7–6·2-ன் படி]

$\therefore$ I_A என்பது A-ல் ஒரு பகுதி வரிசைத் தொடர்பு.

பயிற்சி 8 (இ)

1. N-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x\, R\, y \Longleftrightarrow x \mid y$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு பகுதி வரிசைத் தொடர்பு என நிறுவுக.

2. U முழுமைக் கணம். $P(U)$-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$A\ R\ B \Longleftrightarrow A \subset B$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு பகுதி வரிசைத் தொடர்பு என நிறுவுக.

3. மெய் எண் கணம் A-ல் R என்ற தொடர்பானது

$$x R y \Longleftrightarrow x > y$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஒரு பகுதி வரிசைத் தொடர்பு அல்ல என நிறுவுக.

4. ஒரு தொடர்பு ஒரே சமயத்தில் சமத்துவத் தொடர்பாகவும், பகுதி வரிசைத் தொடர்பாகவும் இருக்க முடியுமா ?

விடை

4. முடியும். கணம் A-ல் I_A என்பது சமத்துவத் தொடர்பு, மற்றும் பகுதி வரிசைத் தொடர்பு.

9. சார்புகள்
(Functions)

9–1. முன்னுரை

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ a, b, c, d, \}$

$R_1 = \{ (1, a), (1, d), (2, a), (2, b), (2, d), (3, b) \}$

$R_2 = \{ (1, c), (2, d), (3, b), (4, b), (5, c) \}$ எனில் அப்பொழுது R_1, R_2 என்பன A-விருந்து B-க்கு இரு தொடர்புகள். இவைகளை ஊன்றிப் பார்ப்போமானால், கீழ்க் காணும் இரு வேறுபாடுகள் தெரிய வரும்.

1. R_1-ன் அரங்கம் $= \{ 1, 2, 3 \} \neq A$

R_2-ன் அரங்கம் $= \{ 1, 2, 3, 4, 5 \} = A$. அதாவது A-ன் சில உறுப்புகள் B-ன் எந்த உறுப்புடனும் R_1–தொடர்பு கொள்ளவில்லை. சான்ருக, A-லுள்ள 4 என்ற உறுப்பு B-ன் எந்த உறுப்புடனும் R_1-தொடர்பு கொள்ளவில்லை. ஆனல், A-ன் உறுப்புகள் அனைத்தும் B-லுள்ள உறுப்புகளுடன் R_2–தொடர்பு கொண்டிருக்கின்றன.

2. A-ன் சில உறுப்புகள் B-ன் உறுப்புகளுள் ஒன்றுக்கு மேற்பட்டவைகளுடன் R_1–தொடர்பு கொண்டிருக்கின்றன. சான்ருக, $2 R_1 a$, $2 R_1 b$, $2 R_1 d$. ஆனல், A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் B-ன் ஒரு தனித்த (unique) உறுப்புடன் மட்டுமே R_2–தொடர்பு கொண்டுள்ளது.

மேற்படி எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, ஒரு கணத்திலிருந்து மற்ருெரு கணத்திற்கு உள்ள தொடர்புகளில் R_1 போன்றவை ஒரு சிறப்பு வகையைச் சேர்ந்தவை என உணரலாம். R_2-ன் தன்மைகளைக் கொண்ட மற்ருெரு தொடர்பைப் பார்ப்போம்.

$A = \{$ மக்கள் $\}$, $B = \{$பெண்கள் $\}$ என்க. A-விருந்து B-க்கு R என்ற தொடர்பானது,

$$x \, R \, y \Longleftrightarrow x\text{-ன் தாயார் } y$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது A-ல் உள்ள ஒவ்வொருவருக்கும் தாயார் B-ல் கண்டிப்பாக இருக்கிருர்.

அதாவது,

$$\forall\, a \in A,\ \exists\, b \in B \ni a R b.$$

மேலும், A-ல் உள்ள எவருக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தாயார்கள் கிடையாது. அதாவது,

$a R b_1 \wedge a R b_2$ எனில், அப்பொழுது $b_1 = b_2$.

R, R_2 போன்ற தொடர்புகள் 'சார்புகள்' என்ற சிறப்புப் பெயரால் அழைக்கப்படுகின்றன.

9–2. சார்புகள் (Functions)

9–2·1. வரையறை

f என்பது கணம் A-லிருந்து கணம் B-க்கு ஒரு தொடர்பு என்க. அதாவது $f \subset A \times B$. f-க்கு

சா. 1. f-ன் அரங்கம் $= A$. அதாவது,

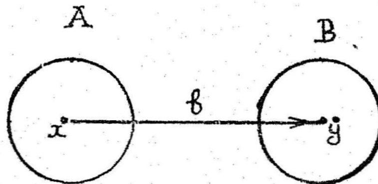
$$\forall\, x \in A,\ \exists\, y \in B \ni (x, y) \in f.$$

சா. 2. $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$ என்ற இரு பண்பு களும் இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஐ A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பு (function) அல்லது அமைப்பு மாற்றம் அல்லது உரு மாற்றம் (mapping) என்கிறோம். இதை

$f : A \longrightarrow B$ அல்லது $A \xrightarrow{f} B$ என எழுதுகிறோம். B ஐ f-ன் துணை அரங்கம் (co-domain) என அழைக்கிறோம்.

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு, $(x, y) \in f$ எனில், அப்பொழுது f-ல் x-ன் பிம்பம் (image) y என்றும், f-ல் y-ன் மூல பிம்பம் (pre-image) x என்றும், x-க்கு f மதிப்பு (value) y என்றும், f ஆனது x ஐ y ஆக உருமாற்றுகிறது (maps) என்றும் சொல்கிறோம். இந்தக் கூற்றுகள் அனைத்தையும்

$x \xrightarrow{f} y$ எனக் குறிக்கிறோம். இதைக் கீழ்க்காணுமாறு படத்தின் (படம் 24-ன்) மூலமும் காட்டலாம்.



f-ல் x-ன் பிம்பம் y

படம் 24

பிம்பம் என்ற கருத்தின்படி பார்த்தால், 'A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு x-க்கும் B-ல் குறைந்தது ஒரு பிம்பம் y உள்ளது' எனச் சா. 1. சொல்கிறது.

'A-லுள்ள x என்ற உறுப்புக்கு B-ல் y_1, y_2 என்ற இரு பிம்பங்கள் இருந்தால், அப்பொழுது $y_1 = y_2$' எனச் சா. 2. சொல்கிறது. ஆகவே,

'A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் B-ல் சரியாக (exactly) ஒரு பிம்பம் தான் உள்ளது' எனச் சா. 1, சா. 2 ஆகியவைகளின் கூட்டுக் கூற்று சொல்கிறது.

இனி, B-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பிற்கு A-ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூல பிம்பங்கள் இருக்க முடியுமா என்ற வினா எழும். இது பற்றிச் சா. 1, சா. 2 என்பவை ஒன்றும் சொல்லவில்லை. எனவே, B-ல் உள்ள ஓர் உறுப்பிற்கு A-ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூல பிம்பங்கள் இருக்கலாம். சான்றாக, 9–1-ல் கூறப்பட்ட R என்ற சார்பில், ஒரு பெண் பல குழந்தைகளுக்குத் தாயாக இருக்கலாம்.

அடுத்து, B-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் A-ல் மூல பிம்பம் இருக்க வேண்டுமா என்ற வினா எழும். இது பற்றியும் சா. 1, சா. 2 என்பவை ஒன்றும் சொல்லவில்லை. எனவே, B-ல் உள்ள சில உறுப்புகளுக்கு A-ல் மூல பிம்பங்கள் இல்லாமலுமிருக்கலாம். சான்றாக. 9–1-ல் கூறப்பட்ட R என்ற சார்பில், ஒரு பெண் எவருக்கும் தாயாக இல்லாமல் இருக்கலாம்.

$f: A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு, $x \in A$ எனில், f-ல் x-ன் பிம்பத்தைப் பொதுவாக $f(x)$ எனக் குறிக்கிறோம். எனவே,

9–2·2. $(x, y) \in f \iff y = f(x)$

இக் குறியீட்டின்படி, சா. 1, சா. 2 என்பவை கீழ்க் காணுமாறு அமைகின்றன.

சா. 1. $\forall\, x \in A, \exists\, y \in B \ni y = f(x)$

சா. 2. $y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Longrightarrow y_1 = y_2$

$f: A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு எனில், f என்பது A-விருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. அதாவது $f \subset A \times B$.

மேலும், f-ன் அரங்கம் $= A$ [சா. 1-ன் படி]

f-ன் வீச்சு $= \{ y \in B \mid (x, y) \in f \}$ [6–5·1-ன் படி]

எனவே, f-ன் வீச்சு $\subset B$.

மறுபடியும், f-ன் வீச்சு $= \{ y \in B \mid y = f(x) \}$ [9–2·2-ன் படி]

$$= \{ f(x) \mid x \in A \}$$

எனவே, f-ன் வீச்சானது A-ன் அனைத்து உறுப்புகளின் பிம்பங்களால் ஆன கணம். ஆகவே, f-ன் வீச்சானது அரங்கத்தின் பிம்பம் (Image of the domain) என அழைக்கப்படுகிறது. இதை $f(A)$ என எழுதுகிறோம். எனவே,

9–2·3. f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subset B$.

கீழ் வருபவை சார்புகளுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

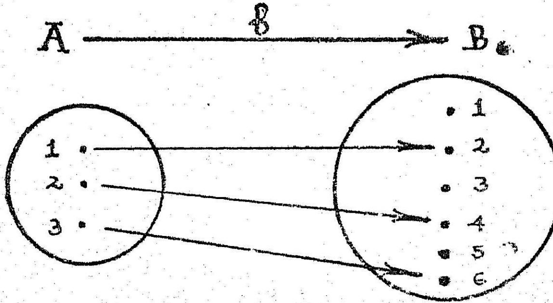
9–2·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$,

$f = \{ (1, 2), (2, 4), (3, 6) \}$ எனில், f என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பாகும். இதைக் கீழ்க் காணும் முறையிலும் தெரிவிக்கலாம்.

$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 4$$
$$f(3) = 6$$

இம் முறையில், A-லுள்ள உறுப்புகளின் பிம்பங்களை எழுதிக் காட்டுகிறோம். இம் முறைக்கு ஒத்தியைபு (correspondence) என்பது பெயர். f ஐ இதே முறையில் அடுத்த பக்கத்தில் தெரிவித்துள்ளவாறும் தெரிவிக்கலாம்.



படம் 25

$$1 \xrightarrow{f} 2$$

$$2 \xrightarrow{f} 4$$

$$3 \xrightarrow{f} 6$$

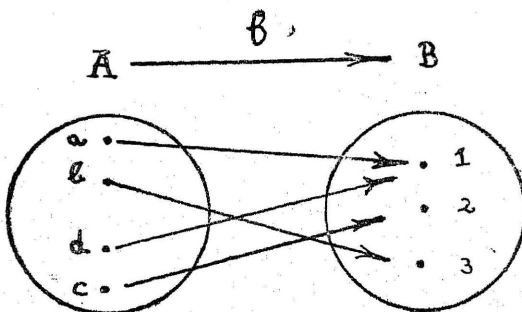
சார்பு f ஐ முன்பக்கத்தில் உள்ள படத்தில் (படம் 25) காட்டியவாறும் தெரிவிக்கலாம். இதற்குப் 'படத்தின் மூலம் வரையறுத்தல்' என்பது பெயர்.

சார்பு f ஐ மற்றுமொரு முறையிலும் தெரிவிக்கலாம். இம் முறை 'வாய்பாடு மூலம் வரையறுத்தல் (definition by a formula)' எனப்படும். வாய்பாடு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$\forall\ x \in A,\quad f(x) = 2x.$$

f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{ f(1), f(2), f(3) \} = \{2, 4, 6\}$

9–2·5. எடுத்துக்காட்டு



படம் 26

$A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$ எனில், படம் 26 $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறது.

f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{ 1, 2, 3 \} = B.$

9–2·6. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{$ உலகிலுள்ள நாடுகள் $\}$,

$B = \{$ உலகிலுள்ள ஊர்கள் $\}$ என்க.

$\forall\ x \in A,\ f(x) = x$-ன் தலைநகர் என்ற வாய்பாடு

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறது.

f (இந்தியா) = புது தில்லி

f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{$ உலகிலுள்ள தலைநகர்கள் $\} \neq B$.

9–2·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = B = \{$ இயற்கை எண்கள் $\}$ என்க.

$\forall\ x \in A,\ f(x) = 2x$ என்ற வாய்பாடானது

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறது.

f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \} \neq B$.

9–2·8. எடுத்துக்காட்டு

$A = B \{$ மெய் எண்கள் $\}$ என்க.

$\forall\ x \in A,\ f(x) = \sin x$ என்ற வாய்பாடு

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறது.

இங்கு, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

f-ன் வீச்சு $\pi \{ y \in B \mid -1 \leqslant y \leqslant 1 \} \neq B$.

9–2·9. எடுத்துக்காட்டு

$A = B = \{$மெய் எண்கள்$\}$ என்க.

$\forall\ x \in A, f(x) = 5$ என்ற வாய்பாடு

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறது.

இங்கு, $f(2) = 5, f\left(\frac{7}{3}\right) = 5, f(\pi) = 5,$

$f(0) = 5, f(-3) = 5, f(-\sqrt{7}) = 5.$

f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{ 5 \} \neq B$.

9–2·10. எடுத்துக்காட்டு

$A = B = \{$ மெய் எண்கள் $\}$ என்க.

$\forall\ x \in A,\ f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \text{ எனில்} \\ -1, & x < 0 \text{ எனில்} \end{cases}$

என்ற வாய்பாடு $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறது.

இங்கு, $f(0) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 1$, $f\left(-\frac{4}{7}\right) = -1$.

f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{1, -1\} \neq B$.

9–2·11. எடுத்துக்காட்டு

$A = B = \{$மெய் எண்கள்$\}$ என்க.

$$\forall x \in A, \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x > 3 \text{ எனில்} \\ x^2 - 2, & -2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ எனில்} \\ 2x + 3, & x < -2 \text{ எனில்} \end{cases}$$

என்ற வாய்பாடு $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பை வரையறுக்கிறது.

இங்கு, $f\left(\frac{11}{3}\right) = 3 \cdot \frac{11}{3} - 1 = 10$

$$f(3) = 3^2 - 2 = 7$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$$

$$f(0) = 0^2 - 2 = -2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = -\frac{7}{4}$$

$$f(-6) = 2(-6) + 3 = -9.$$

9–3. மாதிரிக் கணக்குகள்

9–3·1. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \{(a, 3), (c, 2)\}$ எனில், f என்பது A-லிருந்து Bக்கு ஒரு சார்பா ?

எடுகோள்படி, $f \subset A \times B$.

f-ன் அரங்கம் $= \{a, c\} \neq A$.

எனவே, f-க்கு சா. 1 என்ற பண்பு இல்லை.

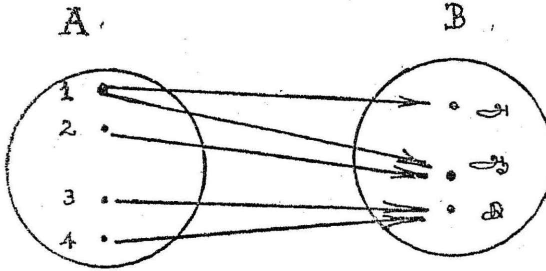
ஆகவே, f என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பல்ல.

9–3·2. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{$அ, ஆ, இ$\}$ எனில், படம் 27, A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பை வரையறுக்கிறதா ?

A-லுள்ள 1 என்ற உறுப்பு B-ல் உள்ள அ, ஆ என்ற இரு உறுப்புகளுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளது. எனவே, இத்

தொடர்புக்குச் சா. 2. என்ற பண்பு இல்லை. ஆகவே, படம் 27 A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பை வரையறுக்கவில்லை.



படம் 27

9-3·3. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{$மெய் எண்கள்$\}$, $B = \{$முழு எண்கள்$\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது

$\forall\ x \in A, f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ஒரு விகிதமுறு எண் எனில்} \\ -1, & x \text{ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில்} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(3), f\left(-\frac{9}{2}\right), f(0)$,

$f(\sqrt{2}), f(-\pi)$, f-ன் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

$3, -\frac{2}{9}, 0$ என்பவை விகிதமுறு எண்கள்.

$\therefore\ f(3) = 1,\ f\left(-\frac{9}{2}\right) = 1,\ f(0) = 1.$

$\sqrt{2}, -\pi$ என்பவை விகிதமுறா எண்கள்.

$\therefore\ f(\sqrt{2}) = -1, f(-\pi) = -1.$

f-ன் வீச்சு $= f(A) = \{1, -1\} \neq B$.

9-3·4. மாதிரிக் கணக்கு

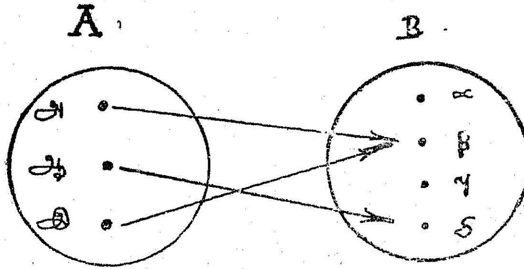
கணம் A-ல் m உறுப்புகளும், கணம் B-ல் n உறுப்புகளும் இருந்தால், A-லிருந்து B-க்கு மொத்தம் எத்தனை சார்புகள் உள்ளன ?

A-ல் உள்ள உறுப்புகளுக்கு B-ல் எத்தனை வழிகளில் பிம்பங்கள் காண முடியுமோ அத்தனை சார்புகள் A-லிருந்து B-க்கு உள்ளன.

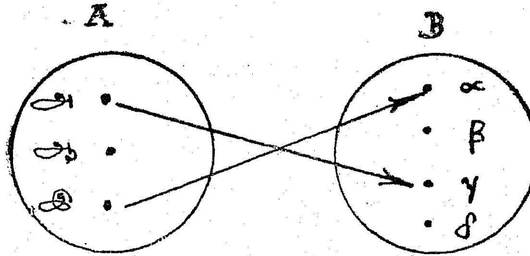
B-ல் *n* உறுப்புகள் உள்ளன. ஆகவே, *A*-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் *n* வழிகளில் பிம்பம் காண முடியும். ஆனால் *A*-ல் *m* உறுப்புகள் உள்ளன. எனவே, *A*-ல் உள்ள உறுப்புகளுக்கு *B*-ல் n^m வழிகளில் பிம்பங்கள் காண முடியும். ஆகவே, *A*-லிருந்து *B*-க்கு மொத்தம் n^m சார்புகள் உள்ளன.

பயிற்சி 9 (அ)

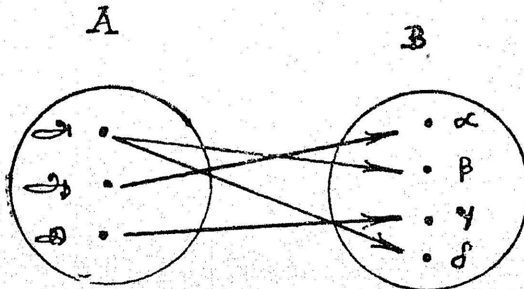
1. $A = \{$ அ, ஆ, இ $\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ எனில், கீழ்வரும் ஒவ்வொரு படமும் *A*-லிருந்து *B*-க்கு ஒரு சார்பை வரையறுக்கிறதா, இல்லையா எனக் கூறுக.



படம் 28



படம் 29



படம் 30

2. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ எனில், கீழ் வரும் தொடர்புகள் ஒவ்வொன்றும் A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பா அல்லவா எனக் கூறுக

$$R_1 = \{(a, 1), (b, 5), (c, 1), (d, 3)\}$$
$$R_2 = \{(a, 3), (b, 4), (d, 5), (c, 7)\}$$
$$R_3 = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$$
$$R_4 = \{(a, 2), (c, 5), (d, 2)\}$$
$$R_5 = \{(a, 4), (b, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 5)\}$$

3. $A = \{$ மக்கள் $\}$, $B = \{$ ஆண்கள் $\}$ என்க. A-லிருந்து B-க்கு R என்ற தொடர்பானது,

$x \, R \, y \Longleftrightarrow x$-ன் அண்ணன் y என வரையறுக்கப்பட்டால், R ஆனது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பா அல்லவா எனக் கூறுக.

4. $f : N \longrightarrow Z$ என்ற சார்பானது,

$$\forall \, x \in N, f(x) = (-1)^x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(6)$, $f(11)$, f-ன் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது.

$$\forall \, x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(3)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$ $f(0)$, $f(-4)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, f-ன் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall \, x \in \mathbb{R}, \; f(x) = x^3$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f-ன் வீச்சைக் காண்க.

7. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f(0)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $f(\pi)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, f-ன் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்க.

8. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 5$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x-2)$ ஐக் காண்க.

9. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geqslant 2 \text{ எனில்} \\ x + 2\ , & x < 2 \text{ எனில்} \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f(5)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ எனில், A-லிருந்து B-க்கு மொத்தம் எத்தனை சார்புகள் உள்ளன ? அவை யாவை ?

11. $f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பெனில், கீழ் வருபவைகளில் எவை பொது உண்மையானவை ?

(a) $f(A) \subset B$

(b) $f(A) =$

(c) $f(A) \supset B$

விடைகள்

1. படம் 28 ஒரு சார்பை வரையறுக்கிறது.
   படம் 29 ஒரு சார்பை வரையறுக்கவில்லை.
   படம் 30 ஒரு சார்பை வரையறுக்கவில்லை.

2. R_1, R_2, R_3 என்பவை சார்புகள்
   R_4, R_5 என்பவை சார்புகளல்ல

3. R ஒரு சார்பல்ல.

4. $f(6) = 1,\ f(11) = -1.$
   f-ன் வீச்சு $= \{1, -1\}$

5. $f(3) = 9,\quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}, f(0) = 0, f(-4) = 16,$

   $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$

   f-ன் வீச்சு $=$ {நேர் மெய் எண்கள்} $\cup \{0\}$

6. f-ன் வீச்சு $= \mathbb{R}$

7. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(0) = 1$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $f(\pi) = -1$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

f-ன் வீச்சு $= \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

8. $f(x - 2) = x^2 - 8x + 17.$

9. $f(5) = 10, f(0) = 2, f(2) = -2, f(-3) = -1$

10. மொத்தம் 8 சார்புகள் உள்ளன. அவை கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$\{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$
$\{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$
$\{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$
$\{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$
$\{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$
$\{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\}$
$\{(a, 2), (b, 2), (c, 1)\}$
$\{(a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$

11. (a) பொது உண்மை
(b) பொது உண்மை அல்ல
(c) பொது உண்மை அல்ல

9-4. சமச் சார்புகள் (Equal Functions)

சார்புகள் அனைத்தும் தொடர்புகள், ஆனால் தொடர்புகள் எல்லாம் சார்புகளல்ல எனக் கண்டோம். சார்புகளுக்குப் பல எடுத்துக்காட்டுகள் பார்த்தோம் இனி இரு சார்புகள் எப்பொழுது சமம் எனப் பார்ப்போம்.

9-4·1. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B, g : A \longrightarrow B$ என்பன இரு சார்புகள் எனில், அப்பொழுது,

$f = g \Longleftrightarrow \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x)$

நிறுவல் :

பாகம் 1 :

$f = g \Longrightarrow \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x)$ என நிறுவ வேண்டும்.

$f = g$ (எடுகோள்).

x என்பது A-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு என்க.

அப்பொழுது,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow (x, y) \in f \qquad [9-2\cdot 2\text{-ன் படி}]$$
$$\Longleftrightarrow (x, y) \in g \qquad [\text{எடுகோள் படி}]$$
$$\Longleftrightarrow y = g(x) \qquad [9-2\cdot 2\text{-ன் படி}]$$

$\therefore \quad \forall\, x \in A, \quad f(x) = g(x).$

பாகம் 2 :

$\forall\, x \in A,\ f(x) = g(x) \Longrightarrow f = g$ என நிறுவ வேண்டும்.

$\forall\, x \in A,\ f(x) = g(x)$ (எடுகோள்)

$$(x, y) \in f \Longleftrightarrow y = f(x) \qquad [9-2\cdot 2\text{-ன் படி}]$$
$$\Longleftrightarrow y = g(x) \qquad [\text{எடுகோள் படி}]$$
$$\Longleftrightarrow (x, y) \in g \qquad [9-2\cdot 2\text{-ன் படி}]$$
$$\therefore \quad f = g. \qquad [2-3\cdot 2\text{-ன் படி}]$$

9-4·2. சமச் சார்புகளுக்கு எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ என்பன இரு கணங்கள். $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B$ என்ற சார்புகள்.

$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$,

$\forall\, x \in A, \quad g(x) = 2x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$f(1) = 2 = g(1)$$
$$f(2) = 4 = g(2)$$
$$f(3) = 6 = g(3)$$
$$\therefore \quad \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x)$$
$$f = g. \qquad [9-4\cdot 1\text{-ன் படி}]$$

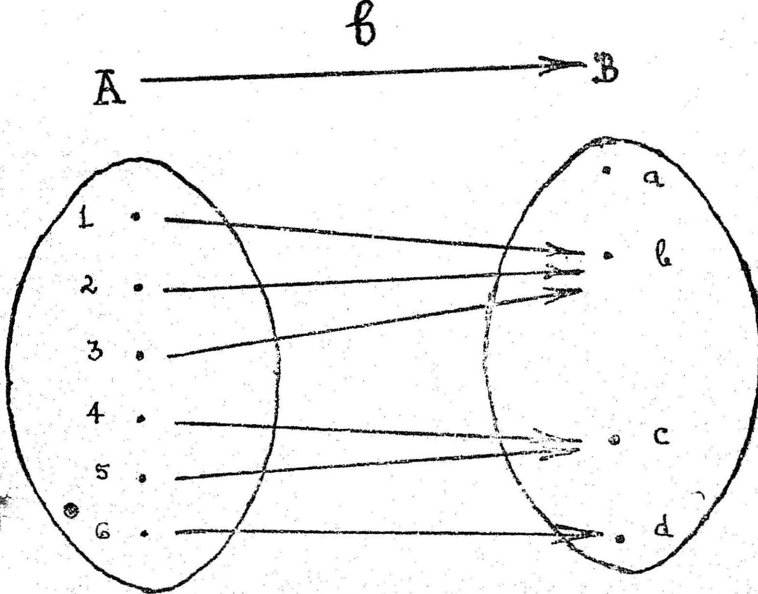
9–5. சார்புகளின் வகைகள்

தொடர்புகளில் பல வகைகள் உண்டென்றும், அவற்றுள் சார்புகள் ஒரு வகையைச் சேர்ந்தவை என்றும் அறிவோம். எந்த ஒரு சார்பிலும், அரங்கத்திலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் துணை அரங்கத்தில் ஒரு தனித்த பிம்பமேஉண்டு;அந்தப் பிம்பம் எதாகவும் இருக்கலாம். எனவே, துணை அரங்கத்தில் பிம்பங்கள் அமையும் விதத்தை வைத்துத்தான் சார்புகளை வகைப்படுத்த முடியும். இனி, சார்புகளின் வகைகளை ஒவ்வொன்ருகப் பார்ப்போம்.

$f : A \longrightarrow B$ ஏதேனுமொரு சார்பு எனில், A-ன் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்கு B-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பே பிம்பமாக அமையலாம். அல்லது A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகள் பிம்பங்களாக அமையலாம். இந்த அடிப்படையில் சார்புகளை இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

9–5·1. வரையறை

$f : A \longrightarrow B$ என்ற [சார்பில் A-ன் குறைந்தது இரு வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B-ன் ஓர் உறுப்பு பிம்பமாக இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஒரு பல-ஒன்று சார்பு (many-one function) எனப்படும். குறியீட்டில்,



படம் 31

$f: A \longrightarrow B$ ஒரு பல-ஒன்று சார்பு

$\Longleftrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in A \ni x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

கீழ்வருபவை பல-ஒன்று சார்புக்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள்.

9–5·2. எடுத்துக்காட்டு

படம் 31 ஆல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $f: A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு ஒரு பல-ஒன்று சார்பு. ஏனென்றால், A-ல் உள்ள 4, 5 என்ற இரு வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கும் B-ன் ஓர் உறுப்பான C பிம்பமாகும்.

9–5·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, b, c\},$

$f = \{(1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$ எனில்,

$f: A \longrightarrow B$ என்பது ஒரு பல-ஒன்று சார்பு. பல-ஒன்று சார்புகளில் இந்தச் சார்பு ஒரு தனி வகையைச் சேர்ந்தது. ஏனென்றால், A-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் B-ன் ஓர் உறுப்பான b பிம்பமாகும். இவ்வகைச் சார்புகளை நிலைச் சார்புகள் என்கிறோம்.

9–5·4. வரையறை

A, B என்பன இரு கணங்கள், b என்பது B-ல் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு என்க. $f: A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது.

$$\forall\, x \in A, \quad f(x) = b$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஆனது ஒரு நிலைச் சார்பு (Constant function) எனப்படும்.

9–5·5. வரையறை

$f: A \longrightarrow B$ என்ற சார்பில், A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகள் பிம்பங்களாக இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஆனது ஓர் ஒன்று-ஒன்று சார்பு (One-one function) எனப்படும். இதை, f ஒரு $1-1$ சார்பு என்றும்,

$f: A \xrightarrow{1-1} B$ என்றும் எழுதுவதுண்டு.

குறியீட்டில்,

$f: A \longrightarrow B$ ஒரு $1-1$ சார்பு

$\Longleftrightarrow [x_1, x_2 \in A,\, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$

அதாவது,

$f: A \longrightarrow B$ ஒரு $1-1$ சார்பு

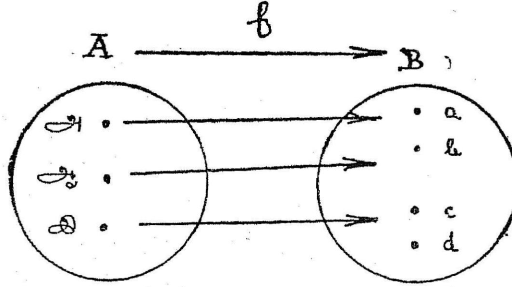
$\Longleftrightarrow [f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2]$

எனவே, ஓர் 1—1 சார்பில், துணை அரங்கத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூல பிம்பங்கள் அரங்கத்தில் இருக்க முடியாது.

ஒரு 1 — 1 சார்பை இன்ஜெக்டிவ் சார்பு (Injective function) என்றும் அழைக்கிறோம்.

கீழ்வருபவை 1 — 1 சார்பிற்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள்.

9–5·6. எடுத்துக்காட்டு



படம் 32

படம் 32 ஆல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு ஓர் 1—1 சார்பு.

9–5·7. எடுத்துக்காட்டு

$f : N \longrightarrow N$ என்ற சார்பானது

$$\forall\ x \in N, \quad f(x) = 2x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் 1—1 சார்பு. ஏனென்றால்,

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2\,x_1 = 2\,x_2$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு எனில், அப்பொழுது f-ன் வீச்சு $= f(A) \subset B$ என அறிவோம். $f(A)$ ஆனது B-ன் முறையான உட்கணமாக இருக்கும் அல்லது முறையற்ற உட்கணமாக இருக்கும். இந்த இரண்டும் ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் தன்மை பெற்றவை. எனவே, இந்த அடிப்படையில் சார்புகளை இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

9–5·8. வரையறை

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்புக்கு $f(A) = B$ என்ற பண்பு இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஆனது ஒரு முழுச் சார்பு

(Onto function) எனப்படும். அதாவது, B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் A-ல் ஒரு மூல பிம்பமாவது (pre-image) இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஒரு முழுச் சார்பு. இதை

$$f : A \xrightarrow{\text{முழு}} B$$ என எழுதுவதுண்டு.

குறியீட்டில்,

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு முழுச் சார்பு

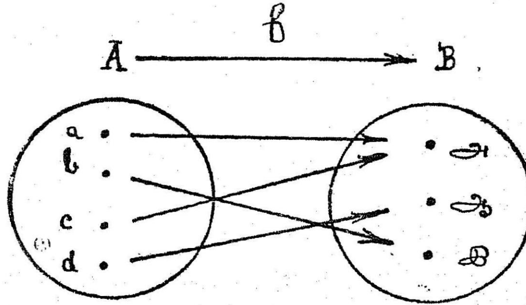
$$\Longleftrightarrow [y \in B \Longrightarrow \exists\, x \in A \ni y = f(x)]$$

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு முழுச் சார்பு எனில், f ஆனது A ஐ B ஆக உரு மாற்றுகிறது. (f maps A onto B) என்று சொல்கிறோம்.

ஒரு முழுச் சார்பை சர்ஜெக்டிவ் சார்பு (Surjective function) என்றும் அழைக்கிறோம்.

கீழ் வருபவை முழுச் சார்பிற்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள்.

9–5·9. எடுத்துக்காட்டு



படம் 33.

படம் 33 ஆல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு ஒரு முழுச் சார்பு.

9–5·10. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$, $B = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது,

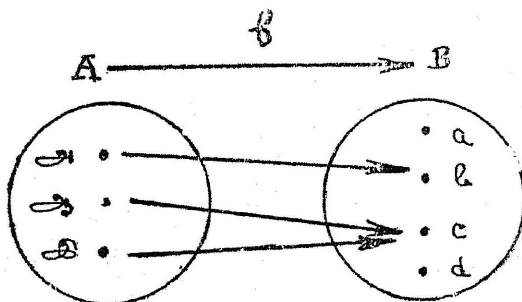
$\forall\, x \in A, f(x) = 2x$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஆனது ஒரு முழுச் சார்பு.

9–5·11. வரையறை

$f: A \longrightarrow B$ என்ற சார்புக்கு $f(A) \neq B$ என்ற பண்பு இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஆனது ஓர் உட்சார்பு (Into function) எனப்படும். அதாவது, B-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பிற்காவது A-ல் மூல பிம்பம் இல்லாதிருந்தால்தான், f ஓர் உட்சார்பு ஆகும்.

கீழ் வருபவை உட்சார்பிற்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள்.

9–5·12. எடுத்துக்காட்டு



படம் 34

படம் 34ஆல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $f: A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு ஓர் உட்சார்பு. ஏனென்றால்,

$$f(A) = \{ b, c \} \neq B.$$

9–5·13. எடுத்துக்காட்டு

$f: N \longrightarrow N$ என்ற சார்பானது $\forall\, x \in A,\ f(x) = 2x$ என வரையறுக்கப்பட்டால் f ஓர் உட்சார்பு. ஏனென்றால்,

$$f(A) = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \} \neq N.$$

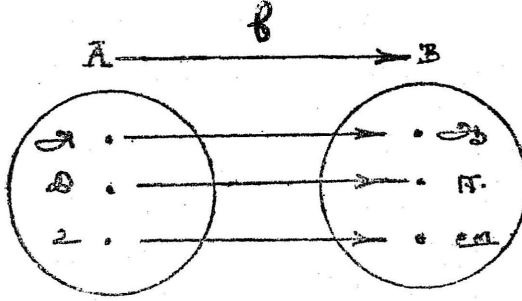
இதுவரை பல-ஒன்று சார்பு, ஒன்று-ஒன்று சார்பு, முழுச் சார்பு, உட்சார்பு என்ற நான்கு வகைச் சார்புகள் பார்த்துள்ளோம். இவற்றுள் ஒன்று - ஒன்று சார்புகளும் முழுச் சார்புகளும் சிறப்பானவை. ஒரு சார்பானது முழுச் சார்பாகவும், $1 - 1$ சார்பாகவும் இருக்குமானால், அதன் சிறப்பு மேலும் உயரும். அத்தகைய சார்புகளைப் பார்ப்போம்.

9–5·14. வரையறை

$f: A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது, $1 - 1$ சார்பாகவும் முழுச் சார்பாகவும் இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஐ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு (Bijective function) என்கிறோம்.

கீழ் வருபவை பைஜெக்டிவ் சார்புக்கு இரு எடுத்துக்காட்டுகள்.

9–5·15. எடுத்துக்காட்டு



படம் 35

படம் 35 ஆல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

9–5·16. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ என்க.
$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது.

$$\forall\ x \in A, \quad f(x) = 2x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு எனில், அப்பொழுது A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் B-ல் ஒரே ஒரு பிம்பம் மட்டுமே இருக்கும். $f : A \longrightarrow B$ ஓர் 1 – 1 சார்பு எனில், B-ன் எந்த ஓர் உறுப்பும் A-ன் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளுக்குப் பிம்பமாக இராது. $f : A \longrightarrow B$ ஒரு முழுச் சார்பு எனில், B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A-ன் ஓர் உறுப்பிற்காவது பிம்பமாக இருக்கும். எனவே, $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு எனில், A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் B-ல் ஒரே ஒரு பிம்பம் மட்டுமே உண்டு, B-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் A-ல் ஒரே ஒரு மூல பிம்பம் மட்டுமே உண்டு. இந்த விதமாக, A-ன் எல்லா உறுப்புகளும் B-ன் எல்லா உறுப்புகளும் இரட்டை இரட்டையாக இணைந்துள்ளன. இக் காரணத்தை முன்னிட்டு, $f : A \longrightarrow B$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பை A-க்கும் B-க்கும் இடையேயுள்ள ஓர் ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஒத்தியைபு (one-to-one correspondence) என அழைக்கிறோம். 9–5·15-ல் உள்ள ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஒத்தியைபைக் கீழ்க் காணுமாறு காட்டலாம்.

அ ⟷ ஆ

இ ⟷ ஈ

உ ⟷ ஊ

9–5·17. வரையறை

$f : A \longrightarrow B$ என்ற ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு இருந்தால் இருந்தால்தான், A-ம் B-ம் ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஒத்திசைவில் உள்ளன என்கிறோம்.

ஒரு சார்பின் அரங்கமும் துணை அரங்கமும் சமமாக இருக்கலாம். இதற்குப் பல எடுத்துக்காட்டுகள் ஏற்கெனவே பார்த்து உள்ளோம். இத்தகைய சார்புகளுள் ஒரு சிறப்பான சார்பைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம்.

9-5·18. வரையறை

$f : A \longrightarrow A$ என்ற சார்பானது

$\forall\, x \in A,\ f(x) = x$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஐ A-ன் மீதான முற்றொருமைச் சார்பு (identity function on A) என்கிறோம். இதை I_A எனக் குறிக்கிறோம்.

எனவே,

$$\forall\, x \in A,\ I_A(x) = x.$$

அதாவது, $I_A = \{ (x, x) \mid x \in A \}$

இப்பொழுது,

$$I_A(x_1) = I_A(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

எனவே, 9–5·5-ன் படி, I_A ஒரு $1-1$ சார்பு.

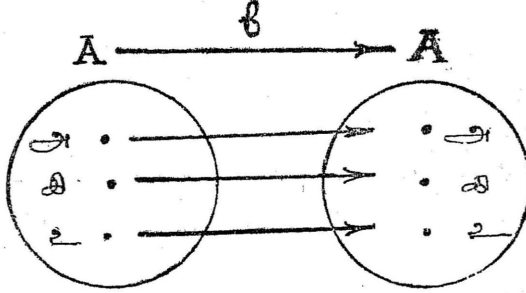
மேலும், I_A-ன் வீச்சு $= A$.

எனவே, 9–5·8-ன் படி, I_A ஒரு முழுச் சார்பு. ஆகவே,

9–5·19. I_A ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

அடுத்து, முற்றொருமைச் சார்பிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

9–5·20. எடுத்துக்காட்டு



படம் 36

படம் 36 ஆல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $f : A \longrightarrow A$ என்ற சார்பு A-ன் மீதான முற்றொருமைச் சார்பு I_A ஆகும்.

9–6. மாதிரிக் கணக்குகள்

9–6·1. மாதிரிக்கணக்கு

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 5, 8\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B$ என்ற சார்புகள்

$\forall\, x \in A, f(x) = x^3$

$g = \{(1, 1), (2, 8)\}$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f = g$ எனக் காட்டுக.

$f(1) = 1^3 = 1 = g(1)$

$f(2) = 2^3 = 8 = g(2)$

$\therefore\ \forall\, x \in A,\ f(x) = g(x).$

$\therefore\ f = g$ [9–4·2-ன் படி]

9–6·2. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ என்ற சார்புகள்

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

$\forall\, z \in \mathbb{C},\ g(z) = z^2$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f \neq g$ எனக் காட்டுக.

f-ன் அரங்கம் $= \mathbb{R}$, g-ன் அரங்கம் $= \mathbb{C}$. ஆனால் $\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$

$\therefore$ f-ன் அரங்கம் $\neq$ g-ன் அரங்கம்

$\therefore$ $f \neq g$

9–6·3. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = 2^x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1-1$ சார்பு என நிறுவுக.

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2}$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பு. [9–5·5-ன் படி]

9–6·4. மாதிரிக் கணக்கு

$f : Z \longrightarrow Z$ என்றசார்பானது

$\forall\ x \in Z, \quad f(x) = x^2$

என வரையறுக்கப்பட்டால், ஓர் $1-1$ சார்பல்ல என நிறுவுக.

$3 \in Z, \quad -3 \in Z, \quad 3 \neq -3$

ஆனால் $f(3) = 9 = f(-3)$

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பல்ல. [9–5·5-ன் படி]

9–6·5. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall\ z \in \mathbb{C}, f(z) = z$-ன் மெய்ப் பகுதி (real part) +
z-ன் கற்பனைப் பகுதி (imaginary part)

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு முழுச் சார்பு என நிறுவுக.

$r \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\ x, \ y \in \mathbb{R} \ni r = x + y$

$\Longrightarrow \exists\ z = x + iy \in \mathbb{C} \ni f(z) = x + y = r$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு. [9–5·8-ன் படி]

9–6·6. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது,

$\forall\ x \in \mathbb{R}, \ f(x) = x^3$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு முழுச் சார்பு என நிறுவுக.

K ஒரு குறிப்பிட்ட மெய் எண் எனில், சமன்பாட்டுக் கொள்கையிலிருந்து (from theory of equations), $x^3 = K$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மெய் மூலம் (real root) உண்டு என அறிவோம். எனவே,

$$y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \ni f(x) = x^3 = y$$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு. [9–5·8-ன் படி]

9–6·7. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என நிறுவுக.

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$$

[f-ன் வரையறைப்படி]

$$\Longrightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\Longrightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ f ஓர் 1 — 1 சார்பு. [9–5·5-ன் படி]

y என்பது $\mathbb{R}$-ன் ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு என்க. அப்பொழுது

$$y = (y - 3) + 3$$

$$= 2\,\frac{(y-3)}{2} + 3$$

$$= 2x + 3, \quad x = \frac{y-3}{2} \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ $y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \ni f(x) = 2x + 3 = y$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore$ f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு .

9–6·8. மாதிரிக் கணக்கு

A, B என்பன இரு வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், $A \times B$, $B \times A$ என்ற இரண்டும் ஒன்றுக்கு ஒன்றுன ஒத்தியைபில் உள்ளன என நிறுவுக.

(மீரட் ப. க. 1968)

$f : A \times B, \longrightarrow B \times A$ என்ற சார்பானது

$\forall\, (a, b) \in A \times B, \quad f((a, b)) = (b, a)$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$f((a, b)) = f((c, d))$

$\Longrightarrow (b, a) = (d, c)$ [f-ன் வரையறைப்படி]

$\Longrightarrow b = d \wedge a = c$ [5–2·2-ன் படி]

$\Longrightarrow a = c \wedge b = d$ [1–10·12 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (a, b) = (c, d)$ [5–2·2-ன் படி]

$\therefore$ f ஓர் $1 - 1$ சார்பு [9–5·5-ன் படி]

$(b, a) \in B \times A \Longrightarrow \exists\ (a, b) \in A \times B \ni f((a, b)) = (b, a)$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9-5·8-ன் படி]

$\therefore$ f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

$\therefore$ $A \times B$, $B \times A$ என்ற இரண்டும் ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஒத்தியையபில் உள்ளன. [9–5·17-ன் படி]

பயிற்சி 9 (ஆ)

1. $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{7, 11, 13, 15, 8\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B$ என்ற சார்புகள்

$f = \{(1, 7), (3, 11), (4, 13)\}$

$\forall\ x \in A,\ g(x) = 2x + 5$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f = g$ என நிறுவுக.

2. $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant a \leqslant 1\}$, $B = \{b \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant b \leqslant 2\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$\forall\ x \in A,\ f(x) = x^2$

$\forall\ x \in B,\ g(x) = x^2$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $f = g$ என்பது உண்மையா, பொய்யா எனக் கூறுக.

3. $A = \{$ உலகிலுள்ள நாடுகள் $\}$,

$B = \{$ உலகிலுள்ள நகர்கள் $\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது

$\forall\ x \in A$, $f(x) = x$-ன் தலைநகர் என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1 - 1$ சார்பா எனக் கூறுக.

4. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ என்க.

$f = \{ a, 1), (b, 4), (c, 5), (d, 2) \}$

$g = \{ (a, 5), (b, 4), (c, 4), (d, 2) \}$ எனில்,

f, g என்பவை A-லிருந்து B-க்கு $1 - 1$ சார்புகளா ?

5. $f : N \longrightarrow N$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in N, \quad f(x) = x^2$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1 - 1$ சார்பு என நிறுவுக.

6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x - 5$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1 - 1$ சார்பு என நிறுவுக.

7. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1 - 1$ சார்பு என நிறுவுக.

8. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1 - 1$ சார்பா ?

9. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு முழுச் சார்பா ?

10. $A = \{ a \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant a \leqslant 1 \}$ என்க. $f : \mathbb{R} \longrightarrow A$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு முழுச் சார்பு என நிறுவுக.

11. $f : Q \longrightarrow Q$ என்ற சார்பானது.

$\forall x \in Q, \quad f(x) = 2x + 3$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என நிறுவுக. (கான்பூர் ப.க. 1969)

12. $A = \mathbb{R} - \{0\}$ என்க. $f : A \longrightarrow A$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in A, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என நிறுவுக.

(மீரட் ப.க. 1969)

13. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = x^3 + 7$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என நிறுவுக.

14. $A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$,

$B = \{ b \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant b \leqslant 1 \}$ என்க. $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது $\forall\, x \in A,\ f(x) = \sin x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என நிறுவுக.

15. $f : N \longrightarrow N$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, n \in N,\quad f(n) = n - (-1)^n$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என நிறுவுக.

16. $f : N \longrightarrow N$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in N,\quad f(x) = x^2$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பல்ல என நிறுவுக.

17. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = x^3 - x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு முழுச் சார்பு ஆனால் $1-1$ சார்பல்ல என நிறுவுக.

18 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\quad f(z) = |z|$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1-1$ சார்பும் அல்ல, முழுச் சார்பும் அல்ல என நிறுவுக.

(காசி ப.க. 1964)

19. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \cos x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஓர் $1-1$ சார்பும் அல்ல, முழுச் சார்பும் அல்ல என நிறுவுக. இது ஓர் $1-1$ சார்பாகவும், முழு

சார்பாகவும் ஆகும்படி அரங்கத்தையும் துணை அரங்கத்தையும் திருத்தி அமைக்க.

(கோரக்பூர் ப. க. 1970)

20. ஒரு நிலைச் சார்பு ஓர் $1-1$ சார்பாக இருக்க முடியுமா ?

21. $A = \{a, b, c\}$-லிருந்து $B = \{1, 2\}$-க்கு மொத்தம் எத்தனை முழுச் சார்புகள் உள்ளன?

விடைகள்

2. பொய்.

3. f ஓர் $1-1$ சார்பு.

4. f ஓர் $1-1$ சார்பு. g ஓர் $1-1$ சார்பல்ல.

8. f ஓர் $1-1$ சார்பல்ல.

9. ஆம்.

19. அரங்கம் $= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$
துணை அரங்கம் $= \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

20. ஒரு நிலைச் சார்பின் அரங்கத்தில் ஓர் உறுப்பு மட்டுமே இருந்தால், அது ஓர் $1-1$ சார்பாகும்.

21. 6

9–7. சார்புகளின் சேர்க்கை (Composition of Functions)

சார்பு என்றால் என்ன, இரு சார்புகள் எப்பொழுது சமமாக இருக்கின்றன என அறிவோம். சார்புகளில் சில முக்கிய வகைகளைப் பார்த்தோம். இனி, சார்புகளின் சேர்க்கை பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம். தொடர்புகளின் சேர்க்கை இதற்குத் துணை செய்யும்.

9–7·1. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள் எனில், அப்பொழுது $g \circ f$ என்பது A-லிருந்து C-க்கு ஒரு சார்பு.

நிறுவல் :

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள். (எடுகோள்)

$\therefore$ f-ன் வீச்சு $\subset B = g$-ன் அரங்கம் ... (1)

மேலும், $f \subset A \times B$, $g \subset B \times C$

$\therefore \; g \circ f \subset A \times C$ [6–7·1-ன் படி]

$\therefore \; g \circ f$-ன் அரங்கம் $\subset A = f$-ன் அரங்கம் ... (2)

$x \in f$-ன் அரங்கம்

$\Longrightarrow \exists\, y \in B \ni (x, y) \in f$ [6–5·2-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in f \wedge (x, y) \in f$ [1–10·11 (a)-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in f \wedge y \in f$-ன் வீச்சு [6–5·3-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in f \wedge y \in g$-ன் அரங்கம் [(1)-லிருந்து]

$\Longrightarrow (x, y) \in f \wedge \exists\, z \in C \ni (y, z) \in g$ [6–5·2-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists\, z \in C \ni (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$

$\Longrightarrow \exists\, z \in C \ni (x, z) \in g \circ f$ [6–7·1-ன் படி]

$\Longrightarrow x \in g \circ f$-ன் அரங்கம் [6–5·2-ன் படி]

எனவே, 2–5·2-ன் படி,

f-ன் அரங்கம் $\subset g \circ f$-ன் அரங்கம் ... (3)

(2), (3)-லிருந்து, 2–3·2-ன் படி,

$g \circ f$-ன் அரங்கம் $= f$-ன் அரங்கம் $= A$

$\therefore \; g \circ f$-க்குச் சா. 1. என்ற பண்பு இருக்கிறது.

$(x, z_1) \in g \circ f \wedge (x, z_2) \in g \circ f$ எனில்,

அப்பொழுது 6–7·1-ன் படி

$\exists\, y_1 \in B \ni (x, y_1) \in f \wedge (y_1, z_1) \in g$,

$\exists\, y_2 \in B \ni (x, y_2) \in f \wedge (y_2, z_2) \in g$.

இப்பொழுது,

$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$

[$\because$ f ஒரு சார்பு]

$\therefore \; (y_1, z_1) \in g \wedge (y_2, z_2) \in g \Longrightarrow (y_1, z_1) \in g \wedge (y_1, y_2) \in g$

$\Longrightarrow z_1 = z_2$ [$\because$ g ஒரு சார்பு]

இந்த விதமாக,

$(x, z_1) \in g \circ f \wedge (x, z_2) \in g \circ f \Longrightarrow z_1 = z_2$

$\therefore \; g \circ f$-க்குச் சா. 2. என்ற பண்பு இருக்கிறது.

$\therefore \; g \circ f$ என்பது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பு.

இனி, பிம்பங்களை எப்படிக் காண்பது எனப் பார்ப்போம்.

$$(x, z) \in g \circ f \iff \exists y \in B \ni (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$$

[6–7·1-ன் படி]

அதாவது,

$$x \xrightarrow{g \circ f} z \iff \exists y \in B \ni x \xrightarrow{f} y \wedge y \xrightarrow{g} z$$

[$\because$ f, g, $g \circ f$ என்பவை சார்புகள்]

அதாவது,

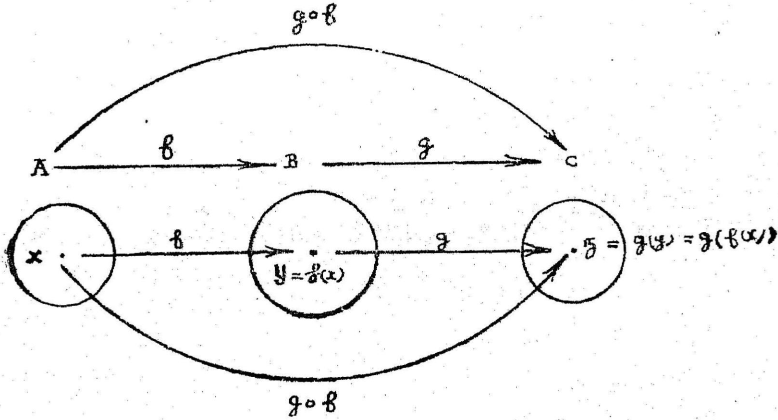
$$z = g \circ f(x) \iff \exists y \in B \ni y = f(x) \wedge z = g(y)$$

$$\iff z = g(f(x))$$

எனவே,

9–7·2. $\forall x \in A, \quad g \circ f(x) = g(f(x))$

இதைக் கீழ்க் காணுமாறு படத்தின் (படம் 37-ன்) மூலமும் காட்டலாம்.



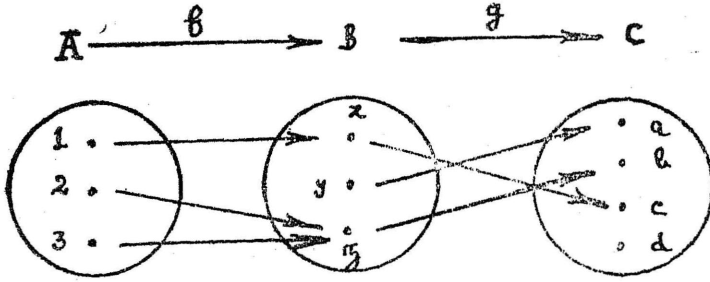
படம் 37

கீழ் வருபவை சேர்க்கைச் சார்புக்குச் (composite function) சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

9–7·3. எடுத்துக்காட்டு

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்ற சார்புகள் படம் 38 ஆல் வரையறுக்கப்பட்டால்,

$g \circ f : A \longrightarrow C$ என்ற சார்பு கீழ்க் காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.



படம் 38

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(x) = c$$
$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(z) = b$$
$$g \circ f(2) = g(f(3)) = g(z) = b$$

9–7·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ என்க. $f : A \longrightarrow A$, $g : A \longrightarrow A$ என்ற சார்புகள்

$$f(1) = 3,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2,$$
$$g(1) = 2,\ g(2) = 4,\ g(3) = 1,\ g(4) = 4$$

என வரையறுக்கப்பட்டால்,

$g \circ f : A \longrightarrow A$, $f \circ g : A \longrightarrow A$ என்ற சார்புகள்

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(3) = 1,$$
$$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(3) = 1,$$
$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(4) = 4,$$
$$g \circ f(4) = g(f(4)) = g(2) = 4,$$

$$f \circ g(1) = f(g(1)) = f(2) = 3,$$
$$f \circ g(2) = f(g(2)) = f(4) = 2,$$
$$f \circ g(3) = f(g(3)) = f(1) = 3,$$
$$f \circ g(4) = f(g(4)) = f(4) = 2$$

என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

9–7·5. எடுத்துக்காட்டு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ g(x) = x + 3$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in R, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$$ என்றும்

$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2$$ என்றும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

மேலும், $g \circ f(1) = 1^2 + 3 = 4$

$f \circ g(1) = (1 + 3)^2 = 16$

$\therefore \quad g \circ f(1) \neq f \circ g(1)$

$\therefore \quad g \circ f \neq f \circ g$

எனவே, சார்புகளின் சேர்க்கை ஒரு பரிமாற்றுச் செயல் அல்ல. ஆனால் இச் செயலுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு என்பதை அடுத்தத் தேற்றம் தெளிவாக்கும்.

9–7·6. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C, \quad h : C \longrightarrow D$ என்பன மூன்று சார்புகள் எனில், அப்பொழுது $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ என்பன சமச் சார்புகள்.

நிறுவல் :

$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C$ என்பன சார்புகள் (எடுகோள்)

$\therefore \quad g \circ f : A \longrightarrow C$ ஒரு சார்பு [9–7·1-ன் படி]

$h : C \longrightarrow D$ ஒரு சார்பு (எடுகோள்)

$\therefore \quad h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D$ ஒரு சார்பு [9–7·1-ன் படி]

$g : B \longrightarrow C, \quad h : C \longrightarrow D$ என்பன சார்புகள் (எடுகோள்)

$\therefore \quad h \circ g : B \longrightarrow D$ ஒரு சார்பு [9–7·1-ன் படி]

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு (எடுகோள்)

$\therefore \quad (h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$ ஒரு சார்பு [9–7·1-ன் படி]

$\therefore \quad h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow D, \ (h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$ என்பன இரு சார்புகள்.

இப்பொழுது,

$\forall x \in A,\ h \circ (g \circ f)(x) = h[g \circ f(x)]$ [9–7·2-ன் படி]

$= h[g(f(x))]$ [9–7·2-ன் படி]

$= h \circ g(f(x))$ [9–7·2-ன் படி]

$= (h \circ g) \circ f(x)$ [9–7·2-ன் படி]

எனவே, 9–4·1-ன் படி, $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ என்பன இரு சமச்சார்புகள்.

9–7·6-லிருந்து, இரண்டுக்கு மேற்பட்ட சார்புகளைச் சேர்க்கும் பொழுது, அடைப்புகள் தேவை இல்லை என அறிகிறோம். எனவே,

9–7·7. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$

ஒவ்வொரு வெற்றற்ற கணத்தின் மீதும் முற்றொருமைச் சார்பு உண்டு என அறிவோம். $f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு எனில், I_A, I_B என்ற முற்றொருமைச் சார்புகள் f உடன் சம்பந்தப் பட்டவை. இவைகளுக்கிடையே உள்ள சம்பந்தத்தை அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து தெரிந்து கொள்வோம்.

9–7·8. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு எனில், அப்பொழுது

(a) $I_B \circ f = f$

(b) $f \circ I_A = f$

நிறுவல்

(a) $f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு (எடுகோள்)

$I_B : B \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு [9·5·18-ன் படி]

$\therefore\ I_B \circ f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு [9·7·1-ன் படி]

இப்பொழுது

$\forall x \in A,\ I_B \circ f(x) = I_B(f(x))$ [9–7·2-ன் படி]

$= f(x)$ [9–5·18-ன் படி]

$\therefore\ I_B \circ f = f$ [9–4·1-ன் படி]

(b)-ன் நிறுவல் படிப்போருக்குப் பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

9–7·9. கிளைத்தேற்றம்

$f : A \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு எனில், அப்பொழுது

$I_A \circ f = f \circ I_A = f$

இனி, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்ற சார்புகளின் தன்மை தெரிந்தால், $g \circ f$-ன் தன்மையை அறிய முடியுமா எனப் பார்ப்போம்.

9–7·10. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு $1 - 1$ சார்புகள் எனில், அப்பொழுது

$g \circ f : A \longrightarrow C$ ஓர் $1 - 1$ சார்பு.

நிறுவல்

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள். (எடுகோள்)

$\therefore$ $g \circ f : A \longrightarrow C$ ஒரு சார்பு [9–7·1-ன் படி]

இப்பொழுது,

$$g \circ f (x_1) = g \circ f (x_2)$$

$\Longrightarrow g (f (x_1)) = g (f (x_2))$

$\Longrightarrow f (x_1) = f (x_2)$ [$\because$ எடுகோள்படி, $g : B \longrightarrow C$ ஓர் $1 - 1$ சார்பு]

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ [$\because$ எடுகோள் படி, $f : A \longrightarrow B$ ஓர் $1 - 1$ சார்பு]

$\therefore$ $g \circ f : A \longrightarrow C$ ஓர் $1 - 1$ சார்பு [9–5·5-ன் படி]

9–7·11. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு முழுச் சார்புகள் எனில், அப்பொழுது

$g \circ f : A \longrightarrow C$ ஒரு முழுச் சார்பு.

நிறுவல்

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள் (எடுகோள்)

$\therefore$ $g \circ f : A \longrightarrow C$ ஒரு சார்பு [9–7·1-ன் படி]

எடுகோள்படி, g ஒரு முழுச் சார்பு. எனவே, 9–5·8-ன் படி,

$z \in C \Longrightarrow \exists\, y \in B \ni g (y) = z$ ...... (1)

எடுகோள்படி, f ஒரு முழுச் சார்பு. எனவே, 9–5·8-ன் படி,

$y \in B \Longrightarrow \exists\, x \in A \ni f (x) = y$ ...... (2)

(1), (2)-லிருந்து,

$$z \in C \Longrightarrow \exists\, x \in A \ni g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

$\therefore\ g \circ f : A \longrightarrow C$ ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

9–7·10, 9–7·11 ஆகிய இரு தேற்றங்களையும் ஒன்று சேர்க்க கீழ்க்காணும் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

9–7·12. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு பைஜெக்டிவ் சார்புகள் எனில், அப்பொழுது,

$g \circ f : A \longrightarrow C$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

9–8. மாதிரிக் கணக்குகள்

9–8·1. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள் $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$ என வரையறுக்கப்பட்டால், $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(மதுரை ப.க. 1972 ஏப்.)

$g \circ f(x) = g(f(x))$ [9–7·2-ன் படி]

$= g(\cos x)$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$= \cos^3 x$ [g-ன் வரையறைப் படி]

$f \circ g(x) = f(g(x))$ [9–7·2-ன் படி]

$= f(x^3)$ [g-ன் வரையறைப் படி]

$= \cos x^3$ [f-ன் வரையறைப் படி]

9–8·2. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\,|x|$, $g(x) = x^2 + 1$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $g \circ f(-4)$, $f \circ g(5)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$f(-4) = (-4)^2 - 2\,|-4| = 16 - 8 = 8$$

இப்பொழுது,

$$g \circ f(-4) = g(f(-4)) = g(8) = 8^2 + 1 = 65$$

$$g(5) = 5^2 + 1 = 26$$

இப்பொழுது $f \circ g(5) = f(g(5)) = f(26) = 26^2 - 2\,|\,26\,|$
$= 676 - 52 = 624.$

9–8·3. மாதிரிக் கணக்கு

$f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள் எனில், அப்பொழுது

$g \circ f$ ஓர் $1-1$ சார்பு $\Longrightarrow f$ ஓர் $1-1$ சார்பு என நிறுவுக.

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ [∵ g ஒரு சார்பு]

$\Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ [9–7·2-ன் படி]

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ [∵ எடுகோள் படி $g \circ f$ ஓர் $1-1$ சார்பு]

∴ f ஓர் $1-1$ சார்பு. [9–5 5-ன் படி]

9–8·4. மாதிரிக் கணக்கு

$f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள், f ஓர் $1-1$ சார்பு எனில், $g \circ f$ ஓர் $1-1$ சார்பாக இருக்க வேண்டியதில்லை என நிறுவுக.

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{$அ$\}$ என்க.

$f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ என்ற சார்புகள்

$f(1) = a$, $f(2) = b$

$g(a) = g(b) = g(c) =$ அ

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது f ஓர் $1-1$ சார்பு.

இப்பொழுது $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(a) =$ அ

$g \circ f(2) = g(f(2)) = g(b) =$ அ.

இந்த விதமாக, $1, 2 \in A$, $1 \neq 2$, ஆனால் $g \circ f(1) = g \circ f(2)$,

∴ $g \circ f$ ஓர் $1-1$ சார்பல்ல.

பயிற்சி 9·(இ)

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ என்க. $f: A \longrightarrow A$, $g: A \longrightarrow A$ என்ற சார்புகள்.

$f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$

$g(1) = 4$, $g(2) = 1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 2$, $g(5) = 3$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $g \circ f$, $f \circ g$ ஆகியவற்றைக் காண்க. $f \circ g = g \circ f$ என்பது உண்மையா ?

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ \ g(x) = x^3$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $g \circ f = f \circ g$ என நிறுவுக.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x - 1,\ \ g(x) = x^3 + 2$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(மதுரை ப. க. 1972 ஏப்.)

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin x,\ \ g(x) = 2x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $g \circ f$, $f \circ g$ ஆகியவற்றைக் காண்க. $g \circ f \neq f \circ g$ என நிறுவுக.

5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 3,\ \ g(x) = x^2 + 5$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், $g \circ f(x)$, $f \circ g(x)$, $f \circ f(x)$ $g \circ g(x)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - 3\,|x|,\ \ g(x) = x^2 - 2$$

என வரையறுக்கப்பட்டால். $g \circ f(2)$, $g \circ f(-5)$, $f \circ g(-3)$, $f \circ g(4)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. $f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு எனில், $f \circ I_A = f$ என நிறுவுக.

8. $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள் எனில், அப்பொழுது $g \circ f$ ஒரு முழுச் சார்பு $\Longrightarrow g$ ஒரு முழுச்சார்பு என நிறுவுக.

9. $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு சார்புகள் எனில், கீழ் வருபவை பொது உண்மைகள் அல்ல என நிறுவுக.

(a) g ஓர் $1-1$ சார்பு எனில், அப்பொழுது $g \circ f$ ஓர் $1-1$ சார்பு.

(b) f ஒரு முழுச் சார்பு எனில், அப்பொழுது $g \circ f$ ஒரு முழுச்சார்பு.

(c) g ஒரு முழுச் சார்பு எனில், அப்பொழுது $g \circ f$ ஒரு முழுச் சார்பு.

(d) $g \circ f$ ஓர் $1-1$ சார்பு எனில், அப்பொழுது g ஓர் $1-1$ சார்பு.

(e) $g \circ f$ ஒரு முழுச் சார்பு எனில், அப்பொழுது f ஒரு முழுச்சார்பு.

விடைகள்

1. $g \circ f : A \longrightarrow A$, $f \circ g : A \longrightarrow A$ என்ற சார்புகள்

$g \circ f(1) = 1$, $f \circ g(1) = 1$,

$g \circ f(2) = 3$, $f \circ g(2) = 3$,

$g \circ f(3) = 1$, $f \circ g(3) = 3$,

$g \circ f(4) = 4$, $f \circ g(4) = 5$,

$g \circ f(5) = 1$, $f \circ g(5) = 3$,

என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

2. $g \circ f \neq f \circ g$

3. $g \circ f(x) = 64x^3 - 48x^2 + 12x + 1$

$f \circ g(x) = 4x^3 + 7$

4. $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்புகள்

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = 2 \sin x$, $f \circ g(x) = \sin 2x$

என வயைறுக்கப்படுகின்றன.

5. $g \circ f(x) = 4x^2 - 20x + 30$

$f \circ g(x) = 2x^2 + 7$

$f \circ f(x) = 4x - 9$

$g \circ g(x) = x^4 + 10x^2 + 30$

6. $g \circ f(2) = 23$

$g \circ f(-5) = 194$

$f \circ g(-3) = -20$

$f \circ g(4) = -41$

9–9. நேர்மாறு சார்பும், நேர்மாறுடைய சார்பும் (Inverse Function and Invertible Function)

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு எனில், அப்பொழுது f ஆனது A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பு. எனவே, $f^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in f \}$ ஆனது B-லிருந்து A-க்கு ஒரு தொடர்பு. ஆனால் தொடர்புகள் எல்லாம் சார்புகளாக இருக்க வேண்டியதில்லை. ஆகவே f^{-1} ஒரு சார்பாக இருக்க வேண்டியதில்லை. f^{-1} என்பதும் ஒரு சார்பாக இருந்தால், f^{-1} ஐ, f-ன் நேர்மாறு சார்பு (Inverse function) என்கிறோம்.

9–9·1. வரையறை

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு என்க. f^{-1} ஒரு சார்பாக இருந்தால் இருந்தால்தான், f ஆனது நேர்மாறுடையது (invertible-இன்வெர்டிபிள்) எனப்படும்.

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு நேர்மாறுடைய சார்பு (invertible function) என்க. 6–6·1-ன் படி,

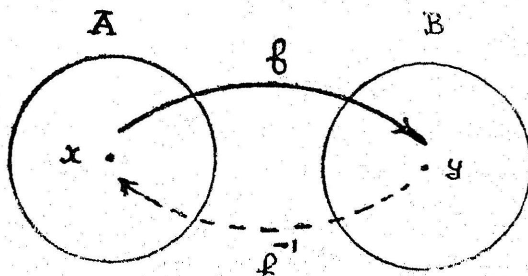
$$(x, y) \in f \Longleftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$$

இந்த விதமாக, $x \xrightarrow{f} y \Longleftrightarrow y \xrightarrow{f^{-1}} x$

அதாவது

9–9·2. $y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

இக் கூற்றைக் கீழ்க் காணுமாறு படத்தின் (படம் 39-ன்) மூலமும் காட்டலாம்.



படம் 39.

அடுத்து நேர்மாறுடைய சார்புக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

9–9·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ என்க.

$f = \{ (1, a), (2, c), (3, b) \} \subset A \times B$,

$f^{-1} = \{ (a, 1), (c, 2), (b, 3) \} \subset B \times A$ எனில்,

f, f^{-1} என்பவை இரண்டும் சார்புகள். எனவே, f ஒரு நேர் மாறுடைய சார்பு.

இனி, ஒரு சார்பு நேர்மாறுடையதாக இருக்க, வேண்டிய மற்றும் போதிய நிபந்தனையைப் (necessary and sufficient condition) பார்ப்போம்.

9–9·4. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது (invertible) எனில், அப் பொழுது $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

நிறுவல் :

$f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது (எடுகோள்)

$\therefore$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு [9–9·1-ன் படி]

எனவே, சா. 1-ன் படி,

f^{-1}-ன் அரங்கம் $= B$

ஆனால் f^{-1}-ன் அரங்கம் $=$ f-ன் வீச்சு [6–6·4-ன் படி]

$\therefore$ f-ன் வீச்சு $= B$

$\therefore$ $f : A \longrightarrow B$ ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

இப்பொழுது,

$(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$

$\Longrightarrow (y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$ [6–6·1-ன் படி]

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ [சார்பு f^{-1}-க்குச் சா. 2-ன் படி]

$\therefore$ $f : A \longrightarrow B$ ஓர் $1-1$ சார்பு [9–5·5-ன் படி]

$\therefore$ $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

9–9·4-லிருந்து, $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு நேர்மாறுடையதாக இருப்பதற்கு, $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என்பது வேண்டிய நிபந்தனை (necessary condition) என அறிகிறோம்.

9–9·5. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு எனில், அப்பொழுது $f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது (invertible)

நிறுவல் :

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு (எடுகோள்)

$\therefore \; f \subset A \times B$ [9–2·1-ன் படி]

$\therefore \; f^{-1} \subset B \times A$ ... (1) [6–6·3-ன் படி]

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு முழுச் சார்பு (எடுகோள்)

$\therefore$ f-ன் வீச்சு $= B$ [9–5·8-ன் படி]

ஆனால், f-ன் வீச்சு $= f^{-1}$-ன் அரங்கம் [6–6·4-ன் படி]

$\therefore$ f^{-1}-க்குச் சா. 1. என்ற பண்பு உள்ளது. ... (2)

இப்பொழுது,

$(y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}$

$\Longrightarrow (x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$ [6–6·1-ன் படி]

$\Longrightarrow y = f(x_1) \wedge y = f(x_2)$ [9–2·2-ன் படி]

$\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ [$\because$ எடுகோள் படி, f ஓர் $1 - 1$ சார்பு]

$\therefore$ f^{-1}-க்குச் சா. 2. என்ற பண்பு உள்ளது. ... (3)

(1), (2), (3)-லிருந்து, $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு.

$\therefore \; f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது. [9–9·1-ன் படி]

9–9·5-லிருந்து, $f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு நேர்மாறுடையதாக இருப்பதற்கு, $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என்பது போதிய நிபந்தனை (sufficient condition) என அறிகிறோம்.

9–9·4, 9–9·5 ஆகிய இரு தேற்றங்களையும் ஒன்று சேர்க்கவே கீழ்க்காணும் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

9–9·6. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பு நேர்மாறுடையதாக இருப்பதற்கு, $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என்பது வேண்டிய மற்றும் போதிய நிபந்தனை (necessary and sufficient condition) ஆகும். குறியீட்டில்,

9–9·7. $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\Longleftrightarrow$ $f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது

$\Longleftrightarrow$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு

இனி, நேர்மாறுடைய சார்புகளின் பண்புகளைப் பார்ப்போம்.

9–9·8. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது எனில், அப்பொழுது

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

நிறுவல் :

$f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது (எடுகோள்)

$\therefore$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு [9–9·1-ன் படி]

இப்பொழுது,

$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$

$\Longrightarrow y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)$ [9–9·2-ன் படி]

$\Longrightarrow y_1 = y_2$

$\therefore$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஓர் $1 - 1$ சார்பு [9–9·5-ன் படி]

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு

$\therefore$ f-ன் அரங்கம் $= A$ [சா. 1-ன் படி]

ஆனால், f-ன் அரங்கம் $= f^{-1}$-ன் வீச்சு [6–6·5-ன் படி]

$\therefore$ f^{-1}-ன் வீச்சு $= A$

$\therefore$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

9–9·9. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது எனில், அப்பொழுது

(a) $f^{-1} \circ f = I_A$

(b) $f \circ f^{-1} = I_B$

நிறுவல் :

(a) $f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது (எடுகோள்)

$\therefore$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு [9–9·1-ன் படி]

$\therefore \quad f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு [9–7·1-ன் படி]

$I_A : A \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு

x என்பது A-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு, $f(x) = y$ என்க.

அப்பொழுது, 9–9·2-ன் படி, $f^{-1}(y) = x$ ... (1)

இப்பொழுது $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x))$ [9–7·2-ன் படி]

$= f^{-1}(y)$ [தற்கோள்]

$= x$ [(1)-லிருந்து]

$I_A(x)$ [9–5·18-ன் படி]

இந்த விதமாக,

$\forall\, x \in A, \quad f^{-1} \circ f(x) = I_A(x)$

$\therefore \quad f^{-1} \circ f = I_A$ [9–4·1-ன் படி]

(b) $f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது (எடுகோள்)

$\therefore \quad f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு [9–9·1-ன் படி]

$\therefore \quad f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு. [9–7·1-ன் படி]

$I : B \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு

y என்பது B-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு, $f^{-1}(y) = x$ என்க.

அப்பொழுது, 9–9·2-ன் படி $f(x) = y$ ... (2)

இப்பொழுது $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y))$ [9–7·2-ன் படி]

$= f(x)$ (தற்கோள்)

$= y$ [(2)லிருந்து]

$I_B(y)$ [9–5·18-ன் படி]

இந்த விதமாக,

$\forall\, y \in B, f \circ f^{-1}(y) = I_B(y)$

$\therefore \quad f \circ f^{-1} = I_B$ [9–4·1-ன் படி]

9–9·10. கிளைத் தேற்றம்

$f : A \longrightarrow A$ நேர்மாறுடையது எனில், அப்பொழுது

$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$

9–9·11. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$ ஒரு சார்பு. $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$ எனும்படி $g : B \longrightarrow A$ என்ற சார்பு இருந்தால், அப்பொழுது $f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது. மேலும் $g = f^{-1}$.

நிறுவல்

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ [∵ எடுகோள் படி g ஒரு சார்பு]

$\Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ [9–7·2-ன் படி]

$\Longrightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2)$ [எடுகோள் படி]

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ [9–5·18-ன் படி]

$\therefore \quad f : A \longrightarrow B$ ஓர் 1 – 1 சார்பு. [9–5·5-ன் படி]

y என்பது B-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு, $g(y) = x \in A$ என்க.

இப்பொழுது,

$y \in B \Longrightarrow I_B(y) = y$ [9–5·18-ன் படி]

$\Longrightarrow f \circ g(y) = y$ [எடுகோள் படி]

$\Longrightarrow f(g(y)) = y$ [9–7·2-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists\, x \in A \ni f(x) = y$ [தற்கோள் படி]

$\therefore \quad f : A \longrightarrow B$ ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore \quad f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore \quad f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது [9–9·5-ன் படி]

$\therefore \quad f^{-1} : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு [9–9·1-ன் படி]

$g : B \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு (எடுகோள்)

y என்பது B-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு, $g(y) = x \in A$ என்க.

இப்பொழுது,

$g(y) = x \Longrightarrow f(g(y)) = f(x)$ [∵ f ஒரு சார்பு]

$\Longrightarrow f \circ g(y) = f(x)$ [9–7·2-ன் படி]

$\Longrightarrow I_B(y) = f(x)$ [எடுகோள் படி]

$\Longrightarrow y = f(x)$ [9–5·18-ன் படி]

$\Longrightarrow f^{-1}(y) = x$ [9–9·2-ன் படி]

$\therefore \quad \forall\, y \in B,\ g(y) = f^{-1}(y)$

$\therefore \quad g = f^{-1}$ [9–4·1-ன் படி]

9–9·12. கிளைத் தேற்றம்

$f : A \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு. $g \circ f = f \circ g = I_A$ எனும்படி $g : A \longrightarrow A$ என்ற சார்பு இருந்தால், அப்பொழுது $f : A \longrightarrow A$ நேர்மாறுடையது. மேலும் $g = f^{-1}$

9–9·9, 9–9·11 ஆகிய இரு தேற்றங்களையும் இணைத்துக் கீழ்க் காணுமாறு எழுதலாம்.

9–9·13. $f : A \longrightarrow B$ நேர்மாறுடையது.

$\Longleftrightarrow \exists g : B \longrightarrow A \ni g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$. g என்ற சார்பு இருந்தால், அப்பொழுது $g = f^{-1}$

9–9·10, 9–9·12. ஆகிய இரு கிளைத் தேற்றங்களையும் இணைத்துக் கீழ்க் காணுமாறு எழுதலாம்.

9–9 14. $f : A \longrightarrow A$ நேர்மாறுடையது.

$\Longleftrightarrow \exists g : A \longrightarrow A \ni g \circ f = f \circ g = I_A$.
g என்ற சார்பு இருந்தால், அப்பொழுது $g = f^{-1}$.

9–9·15. தேற்றம்

$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு பைஜெக்டிவ் சார்புகள் எனில், அப்பொழுது $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ என்பவை சமச் சார்புகள்.

நிறுவல் :

எடுகோள்படி, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு பைஜெக்டிவ் சார்புகள்.

$\therefore$ $g \circ f : A \longrightarrow C$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு [9–7·12-ன் படி]

$\therefore$ $(g \circ f)^{-1} : C \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு ... (1) [9–9·7-ன் படி]
எடுகோள்படி, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ என்பன இரு பைஜெக்டிவ் சார்புகள்.

$\therefore$ $f^{-1} : B \longrightarrow A$, $g^{-1} : C \longrightarrow B$ என்பன இரு சார்புகள் [9–9·7-ன் படி]

$\therefore$ $f^{-1} \circ g^{-1} : C \longrightarrow A$ ஒரு சார்பு ... (2) [9–7·1-ன் படி]

$(x, y) \in (g \circ f)^{-1}$

$\Longleftrightarrow (y, x) \in g \circ f$ [6–6·1-ன் படி.]

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in B \ni (y, z) \in f \wedge (z, x) \in g$ [6–7·1-ன் படி.]

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in B \ni (z, y) \in f^{-1} \wedge (x, z) \in g^{-1}$ [6–6·1-ன் படி.]

$\Longleftrightarrow \exists\, z \in B \ni (x, z) \in g^{-1} \wedge (z, y) \in f^{-1}$

[1-10·12 (a)-ன் படி.]

$\Longleftrightarrow (x, y) \in f^{-1} \circ g^{-1}$ ... (3) [6–7·1-ன் படி.]

(1), (2), (3) லிருந்து, 9–4·1-ன் படி, $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ என்பவை சமச் சார்புகள்.

9–10. மாதிரிக் கணக்குகள்

9–10·1. மாதிரிக் கணக்கு

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x - 8$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f நேர்மாறுடையது என நிறுவுக. f^{-1} ஐக் காண்க.

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 5x_1 - 8 = 5x_2 - 8$ [f-ன் வரையறைப் படி.]

$\Longrightarrow 5x_1 = 5x_2$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f ஓர் 1 — 1 சார்பு. [9–5·5-ன் படி.]

y என்பது $\mathbb{R}$-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு என்க.

அப்பொழுது $y = y + 8 - 8$

$$= \frac{5(y+8)}{5} - 8$$

$\dfrac{y+8}{5} = x$ என இட்டால்,

$y = 5x - 8, \quad x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \ni f(x) = 5x - 8 = y$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி.]

$\therefore$ f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore$ f நேர்மாறுடையது [9–9·5-ன் படி.]

$\therefore$ $f^{-1} \mathbb{R} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ஒரு சார்பு [9–9·1-ன் படி.]

y என்பது $\mathbb{R}$-ன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு, $f^{-1}(y) = x \in \mathbb{R}$ என்க.

அப்பொழுது $y = f(x)$ [9–9·2-ன் படி]

$= 5x - 8$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$$\therefore \quad x = \frac{y+8}{5}$$

எனவே, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall\, y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \dfrac{y+8}{5}$ என வரையறுக்கப் படுகிறது.

9–10·2. மாதிரிக் கணக்கு

$A = \{ a \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant a \leqslant 1 \}$ என்க. $f : \mathbb{R} \longrightarrow A$ என்ற சார்பானது, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$ என வரையறுக்கப் பட்டால், f நேர்மாறுடையதல்ல என நிறுவுக.

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f(2\pi) = \cos 2\pi = 1$$

$\therefore\ f(0) = f(2\pi)$. ஆனால் $0 \neq 2\pi$

$\therefore\ f$ ஓர் $1-1$ சார்பல்ல [9–5·5-ன் படி]

$\therefore\ f$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பல்ல

$\therefore\ f$ நேர்மாறுடையதல்ல.

9–10·3. மாதிரிக் கணக்கு

(a) A ஒரு முடிவுள்ள கணம், $f : A \longrightarrow A$ ஓர் $1-1$ சார்பு எனில், $f : A \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பு என நிறுவுக.

(b) A ஒரு முடிவில்லாக் கணம், $f : A \longrightarrow A$ ஓர் $1-1$ சார்பு எனில், $f : A \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பாக இருக்க வேண்டியதில்லை என நிறுவுக.

(a) A-ல் n உறுப்புகள் உள்ளன என்க. முடியுமானால், $f : A \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பாக இல்லாதிருக்கட்டும். அப்பொழுது துணை அரங்கத்தின் குறைந்தது ஓர் உறுப்பிற்கேனும் அரங்கத்தில் மூல பிம்பம் இராது. $K\ (\geqslant 1)$ உறுப்புகளுக்கு மூல பிம்பங்கள் இல்லை எனில், அப்பொழுது மொத்தத்தில் $n - K$ பிம்பங்கள் தாம் உண்டு. எனவே, n உறுப்புகளுக்கு $n - K$ பிம்பங்கள் தாம் இருக்கின்றன. ... (1)

ஆனால், எடுகோள் படி, $f : A \longrightarrow A$ ஓர் $1-1$ சார்பு. எனவே, n உறுப்புகளுக்கு n பிம்பங்கள் இருக்க வேண்டும். ... (2)

ஆகவே, (1), (2) ஆகிய இரண்டும் முரண்படுகின்றன. எனவே, $f : A \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பாக இல்லாதிருக்க முடியாது. ஆகவே, $f : A \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பு.

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots \ldots\}$ என்க. $f : A \longrightarrow A$ என்ற சார்பானது. $\forall\, x \in A,\ f(x) = 2x$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$f(x_1) = f(x_2) \implies 2x_1 = 2x_2 \quad [f\text{-ன் வரையறைப் படி}]$$
$$\implies x_1 = x_2$$

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பு. [9-5·5-ன் படி]

ஆனால் f ஒரு முழுச் சார்பல்ல. ஏனென்றால்

$$f(A) = \{2, 4, 6, 8, \ldots \ldots\} \neq A$$

பயிற்சி 9 (ஈ)

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 2$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f நேர்மாறுடையது என நிறுவுக. f^{-1} ஐக் காண்க.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 5$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f நேர்மாறுடையது என நிறுவுக. f^{-1} ஐக் காண்க.

3. $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant a \leqslant \pi\}$,

$B = \{b \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant b \leqslant 1\}$ என்க.

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது, $\forall\, x \in A,\ f(x) = \cos x$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f நேர்மாறுடையது என நிறுவுக.

4. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{cosec} x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f நேர்மாறுடையதல்ல என நிறுவுக.

5. A ஒரு முடிவுள்ள கணம், $f : A \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பு எனில், $f : A \longrightarrow A$ ஓர் $1-1$ சார்பு என நிறுவுக.

6. A ஒரு முடிவில்லாக் கணம், $f : A \longrightarrow A$ ஒரு முழுச் சார்பு எனில், $f : A \longrightarrow A$ ஓர் $1-1$ சார்பாக இருக்க வேண்டிய தில்லை என நிறுவுக.

7. A என்ற முடிவுள்ள கணத்தில் n உறுப்புகள் இருந்தால், A-லிருந்து A-க்கு மொத்தம் $n!$ பைஜெக்டிவ் சார்புகள் உண்டு என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall\, y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{3}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

2. $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall\, y \in \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = (y-5)^{\frac{1}{3}}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

9–11. வரிசை மாற்றம் (Permutation)

சார்புகளில் பைஜெக்டிவ் சார்புகள் மிகச் சிறப்பானவை. ஏனென்றால், அவைகளுக்குத்தான் நேர்மாறு சார்புகள் (inverse functions) உண்டு. ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பின் அரங்கம் ஒரு முடிவுள்ள கணமாகவும், அரங்கமும் துணை அரங்கமும் சமமாகவும் இருந்தால், அது ஒரு தனி வகையைச் சேரும். இவ்வகைச் சார்புகள் பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம்.

9–11·1. வரையறை

A என்பது ஒரு முடிவுள்ள கணம் எனில், அப்பொழுது $f : A \longrightarrow A$ என்ற எந்த ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பையும் A-ன் ஒரு வரிசை மாற்றம் (Permutation) என்கிறோம்.

ஒரு வரிசை மாற்றத்தின் அரங்கத்தில் n வெவ்வேறு உறுப்புகள் இருந்தால், அது ஒரு n-படி வரிசை மாற்றம் (n th degree permutation) எனப்படும். இந்த n உறுப்புகளையும் $a_1, a_2, \ldots, a_n$ அல்லது $1, 2, \ldots, n$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

$A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $f : A \longrightarrow A$ ஒரு வரிசை மாற்றம் எனில், அப்பொழுது

$$f = \{(1, f(1)), (2, f(2)), \ldots, (n, f(n))\}$$

வசதியைக் கருத்திற் கொண்டு, வரிசை மாற்றத்தை எழுத இரு நிரைக் குறியீட்டைப் (two-row symbol) பயன்படுத்துகிறோம். அக் குறியீட்டின் படி,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots\dots\dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots\dots\dots & f(n) \end{pmatrix}$$

இதில் n நிரல்களும் (columns), 2 நிரைகளும் (rows) உள்ளன. ஒவ்வொரு நிரலிலும் இரு உறுப்புகள் உள்ளன. இரண்டாம் நிரையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் முதல் நிரையில் அதற்குச் சரியாக மேலே உள்ள உறுப்பின் பிம்பமாகும். A-ல் n உறுப்புகள் உள்ளதால், பயிற்சி 9(ஈ) கணக்கு 7-ன் படி, மொத்தம் $n!$ வரிசை மாற்றங்கள் உள்ளன. இவைகள் அனைத்தையும் மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை S_n எனக் குறிக்கிறோம்.

அடுத்து வரிசை மாற்றத்திற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

9–11·2. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2, 3\}$ எனில், $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ A-ன் ஒரு வரிசை மாற்றம்.

$$g = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ எனில்,}$$

அப்பொழுது $f(1) = 3 = g(1)$

$f(2) = 1 = g(2)$

$f(3) = 2 = g(3)$

$\therefore \quad f = g$ [9–4·1-ன் படி]

எனவே, ஒரு வரிசை மாற்றத்தை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வழிகளில் எழுதலாம் என அறிகிறோம். f ஐ

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

என்று எழுதலாம்.

A-ல் 3 உறுப்புகள் இருப்பதால், மொத்தம் $3!$ வரிசை மாற்றங்கள் உள்ளன. அதாவது, S_3-ல் 6 உறுப்புகள் உள்ளன. அவைகள் பின் வருமாறு :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9–11·3. முற்றொருமை வரிசை மாற்றம் (Identity Permutation)

A என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் எனில், அப்பொழுது I_A என்பது A-ன் மீதான முற்றொருமைச் சார்பாகும்.

$\forall\ x \in A,\ I_A\ (x) = x.$ 9–5·19-ன் படி, I_A ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு.

$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ எனில், அப்பொழுது

$I_A\,(a_i) = a_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$\therefore\ I_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$. இதை n படி முற்றொருமை வரிசை மாற்றம் என்கிறோம். இதைச் சுருக்கமாக I என எழுதுவது வழக்கம். எனவே, $I \in S_n$

அடுத்து முற்றொருமை வரிசை மாற்றத்திற்கு ஓர் எடுத்துக் காட்டு பார்ப்போம்.

9–11·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{ 1, 2, 3 \}$ எனில், அப்பொழுது

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9–11·5. வரிசை மாற்றங்களின் f சேர்க்கை (Composition of Permutations)

$f : A \longrightarrow A,\ g : A \longrightarrow A$ என்பன இரு பைஜெக்டிவ் சார்புகள் எனில், அப்பொழுது 9–7·1-ன் படி, $g \circ f : A \longrightarrow A$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு. எனவே, $f, g \in S_n$ எனில், அப்பொழுது $g \circ f \in S_n$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ எனில், அப்பொழுது

$g \circ f\,(1) = g\,(f\,(1)) = g\,(2) = 3,$

$g \circ f\,(2) = g\,(f\,(2)) = g\,(3) = 2.$

$g \circ f\,(3) = g\,(f\,(3)) = g\,(1) = 1.$

இப்பொழுது $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$

அதாவது, $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ஆனால் $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ஐ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ என எழுதலாம்.

எனவே,

$g \circ f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. இதில் f-ன் இரண்டாம் நிரையும் g-ன் முதலாம் நிரையும் ஒரே மாதிரியாக (identical) உள்ளன. இப்படி எழுதுவதால், 1, 2, 3 ஆகியவற்றின் $g \circ f$ பிம்பங்களைக் காண்பது எளிதாக இருக்கிறது. $g \circ f$ என்ற சேர்க்கை வரிசை மாற்றத்தில் (composite permutation) முதலது f என்ற வரிசை மாற்றம், இரண்டாவது g என்ற வரிசை மாற்றம். எனவே, $g \circ f$ ஐ வசதி கருதி $f \circ g$ என எழுதுகிறோம். இதன்படி,

$$\circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$f \circ g$ ஐச் சுருக்கமாக fg என எழுதுவது வழக்கம்.

fg ஐ f, g களின் பெருக்கம் (product) என்கிறோம்.

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots a_n \\ b_1 & b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$$

எனில், மேலே கூறிய முறைப்படி,

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$$

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், அப்பொழுது

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\therefore \quad fg(1) = 3, \; gf(1) = 2$

$\therefore \quad fg(1) \neq gf(1)$

$\therefore \quad fg \neq gf$

எனவே, வரிசை மாற்றங்களின் சேர்க்கைக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இடையாது.

வரிசை மாற்றங்கள் எல்லாம் சார்புகள். 9-7·6-ன் படி, சார்புகளின் சேர்க்கைக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு. ஆகவே, வரிசை மாற்றங்களின் சேர்க்கைக்கும் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு. எனவே,

$\alpha, \beta, \gamma \in S_n$ எனில், அப்பொழுது,

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma = \alpha\beta\gamma$$

$\alpha \in S_n$, $m \in N$ எனில், $\alpha\,\alpha\,\alpha \ldots m$ காரணிகள் என்ற பெருக்கத்தை α^m என எழுதுகிறோம்.

9–11·6. எடுத்துக்காட்டு

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

எனில், அப்பொழுது

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$ABA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 B = AAB$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

9–11·7. I-ன் முற்றொருமைப் பண்பு

$$\lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \in S_n \text{ எனில், அப்பொழுது,}$$

$$\lambda I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\lambda I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\therefore \quad \lambda I = I \lambda = \lambda$$

ஆகவே, மெய் எண் பெருக்கலில் 1 செய்யும் வேலையை, வரிசை மாற்றங்களின் சேர்க்கையில் I செய்கிறது. எனவே, வரிசை மாற்றங்களின் சேர்க்கைக்கு I முற்றொருமை உறுப்பு (**identity element**) ஆகும்.

9–11·8. நேர்மாறு வரிசை மாற்றம் (**Inverse Permutation**)

$$\lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \in S_n \text{ எனில், அப்பொழுது,}$$

λ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore$ λ நேர்மாறுடையது [9–9·5-ன் படி]

$\therefore$ λ^{-1} ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு [9–9·8-ன் படி]

$\therefore$ λ^{-1} ஒரு வரிசை மாற்றம். அதாவது, $\lambda^{-1} \in S_n$

9–9·2-ன் படி,

$$a_i \xrightarrow{\lambda} b_i \iff b_i \xrightarrow{\lambda^{-1}} a_i$$

$$\therefore \quad \lambda^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

ஆகவே, λ-ன் 1 ஆம், 2 ஆம் நிரைகளை முறையே 2 ஆம், 1 ஆம் நிரைகளாக மாற்றி எழுதினால், λ^{-1} கிடைக்கும்.

மேலும், $\alpha\,\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = I,$

$$\alpha^{-1}\,\alpha = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = I.$$

$\therefore\ \alpha\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\,\alpha = I$

வரிசை மாற்றங்களின் முக்கியப் பண்புகளைத் தொகுத்துக் கீழே தருகிறோம்.

9–11·9. வரிசை மாற்றங்களின் முக்கியப் பண்புகள்

1. S_n-ல் $n\,!$ உறுப்புகள் உள்ளன.
2. $\alpha \in S_n$ எனில், α ஐ $n\,!$ வழிகளில் எழுதலாம்.
3. $\alpha, \beta \in S_n \Longrightarrow \alpha\beta \in S_n$
4. $\forall\ \alpha, \beta\,\gamma \in S_n, \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
5. $\alpha \in S_n \Longrightarrow \alpha I = I\alpha = \alpha$
6. $\alpha \in S_n \Longrightarrow \alpha\,\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\,\alpha = I$
7. $\alpha, \beta \in S_n$ எனில், $\alpha\beta = \beta\alpha$ என இருக்க வேண்டியதில்லை.

பயிற்சி 9 (உ)

1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \beta \in \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ எனில்,

   $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ என நிறுவுக.

2. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$

   $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   எனில், $\alpha\beta\gamma$ ஐக் காண்க.

3. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $\alpha^3 = I$ என நிறுவுக.

4. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ எனில்,

$\alpha^{-1}\beta$, $\alpha\beta^{-1}\alpha$, $\beta^2\alpha$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ எனில்,

$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$ என நிறுவுக.

விடைகள்

2. $\alpha\beta\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\alpha^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\alpha\beta^{-1}\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\beta^2\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

10. எண்ணிடத்தக்க கணங்களும் எண்ணிடத்தகாத கணங்களும்

(Countable Sets and Uncountable Sets)

10-1. முன்னுரை

கணங்களுக்கு இடையே = என்பது ஒரு தொடர்பு; ⊂ என்பது மற்றொரு தொடர்பு. பொது உறுப்பின்மை (disjointness) பிறிதொரு தொடர்பாகும். இன்னுமொரு முக்கிய தொடர்பைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம்.

கணங்கள், எண்ணும் எண்கள் (counting numbers) என்ற இரு கருத்துகளுக்கும் (concepts) மிக நெருங்கிய சம்பந்தம் உண்டு. பொருள்களை எண்ணுதல் என்பது உண்மையில் ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை எண்ணுதலேயாகும். சான்றாக, ஒரு மாணவன் ஒரு கையிலுள்ள விரல்களை எண்ணும்பொழுது, ஐந்து பொருள்கள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை எண்ணுகிறான். அவன் புலன்களை எண்ணும் போதும், ஐந்து பொருள்கள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளையே எண்ணுகிறான். அவை கண், காது, மூக்கு, நாக்கு, மெய் ஆகும். அவன் தமிழிலுள்ள பெருங் காப்பியங்களை எண்ணும் பொழுதும், ஐந்து பொருள்கள் கொண்ட ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளையே எண்ணுகிறான். அவை சிலப்பதிகாரம், மணிமேகலை, சீவக சிந்தாமணி, வளையாபதி, குண்டலகேசி ஆகும். மேலே சொல்லப்பட்ட மூன்று கணங்களின் பௌதிகப் பண்புகள் (physical properties) வேறுபட்டவை; ஆனால் அவைகளின் எண் பண்பு (number property) ஒன்றே. அது 'ஐந்து' ஆகும். அவை ஒவ்வொன்றிலும் ஐந்து உறுப்புகளே உள்ளன. இதிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதன் அருவ இயல்பைப் (abstract nature) பொறுத்ததேயல்லாமல் அதன் மற்ற இயல்புகளைப் பொறுத்ததல்ல. எனவே, ஒரு குழந்தை 'ஐந்து' என்ற எண்ணை நினைக்கும்பொழுது, அதன் மனக் கண் முன் ஐந்து உறுப்புகள் கொண்ட பல கணங்கள் தோன்றும். ஐந்து உறுப்புகள் கொண்ட எல்லாக் கணங்களின் பொதுப் பண்பு ஐந்து என்ற எண் பண்பாகும். இந்த அடிப்படையில் ஐந்து உறுப்புகள் கொண்ட எல்லாக் கணங்களையும் சமத்துவக் கணங்கள் (equivalent sets) என்கிறோம். இது மற்ற

எண்ணும் எண்களுக்கும் (counting numbers) பொருந்தும். எனவே, எண் பண்பின் அடிப்படையில், சமத்துவக் கணங்கள் என்பவை சம எண்ணிக்கை உறுப்புகளால் ஆன கணங்களாகும்.

இரு முடிவுள்ள கணங்கள் சமத்துவக் கணங்களா அல்லவா எனத் தீர்மானிப்பது எளிது. சான்றாக, $A = \{$ அ, இ, உ $\}$, $B = \{$ ஆ, ஈ, ஊ $\}$ என்பவை சமத்துவக் கணங்கள். ஏனென்றால், A, B என்ற ஒவ்வொன்றிலும் மூன்று உறுப்புகளே உள்ளன. $C = \{a, b\}$, $D = \{\lambda, \beta, \gamma, \delta, \in\}$ என்பவை சமத்துவக் கணங்கள் அல்ல. ஏனென்றால், C-ல் இரண்டே உறுப்புகள் உள்ளன, ஆனால் D-ல் ஐந்து உறுப்புகள் உள்ளன.

இனி, முடிவில்லாக் கணங்கள் பற்றிப் பார்ப்போம்.

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

என்ற இரு கணங்களில் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள உறுப்புகளை எண்ண எண்ண, அவை முடிவில்லாது வந்து கொண்டே இருக்கும். எனவே, N, E என்பவை சமத்துவக் கணங்கள் என்று சொல்லத் தோன்றும். ஆனால் E என்பது N என்பதன் ஒரு முறையான உட்கணம். ஆகவே, N, E என்ற இரண்டும் சமத்துவக் கணங்கள் அல்ல எனக் கூறத் தோன்றும். எனவே, இரு முடிவில்லாக் கணங்கள் சமத்துவக் கணங்களா அல்லவா என முடிவு செய்வதில் சிக்கல் உள்ளது. இச் சிக்கலை நீக்க, சம எண்ணளவு கொண்ட கணங்கள் என்ற கருத்தானது தெளிவாக வரையறுக்கப்பட வேண்டும். இந்த வரையறையைத் தந்த பெருமை ஜெர்மானியக் கணித மேதை கேன்டார் (Cantor) *[1845 — 1918]* அவர்களையே சாரும். இது கணக் கொள்கையில் (set theory) ஒரு மாபெரும் புரட்சியை ஏற்படுத்தியது என்பது குறிப்பிடத் தக்கது. இனி வரையறையைப் பார்ப்போம்.

10–2. எண்ணளவு சமத்துவம் (Numerical Equivalence)

10–2·1. வரையறை

கணம் A-லிருந்து கணம் B-க்கு ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு இருந்தால் இருந்தால்தான், A ஆனது B-க்கு எண்ணளவில் சமத்துவமானது (numericaly equivalent) என்கிறோம். இதை $A \sim B$ என எழுதுகிறோம்.

குறியீட்டில்,

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists\ f : A \longrightarrow B \text{ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பு.}$$

$A \sim B$ என்பதைக் கீழ்க்காணுமாறும் சொல்கிறோம்.

1. A ஆனது B-க்கு முதலெண் அளவில் சமத்துவமானது (cardinally equivalent).

2. சுருக்கமாக, A ஆனது B-க்குச் சமத்துவமானது.

$\sim$ என்பது கணங்களுக்கிடையே உள்ள ஒரு தொடர்பு எனப் பார்த்தோம். அடுத்து இது ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு (equivalence relation) என நிறுவுவோம்.

10–2·2. தேற்றம்

முழுமைக் கணம் U-ன் எல்லா வெற்றற்ற உட்கணங்களை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணக் குடும்பம் $\mathbb{F}$-ல் எண்ணளவு சமத்துவம் (numerical equivalence) $\sim$ என்பது ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு (equivalence relation).

நிறுவல் :

$\forall\ A \in \mathbb{F},\ I_A : A \longrightarrow A$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு [9–5·19-ன் படி]

$\therefore\ A \sim A$ [10–2·1-ன் படி]

$\therefore$ $\sim$ ஒரு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு. [7–2·1 ன் படி]

$A \sim B \Longrightarrow \exists f : A \longrightarrow B$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பு [10–2·1-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists f^{-1} : B \longrightarrow A$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பு [9–9·5, மற்றும் 9–9·8-ன் படி]

$\Longrightarrow B \sim A$ [10–2·1-ன் படி]

$\therefore$ $\sim$ ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு [7–4·1-ன் படி]

$A \sim B \wedge B \sim C$

$\Longrightarrow \exists\ f : A \longrightarrow B$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\wedge\ \exists g : B \longrightarrow C$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பு [10–2·1-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists g \circ f : A \longrightarrow C$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பு [9–7·12-ன் படி]

$\Longrightarrow A \sim C$ [10–2·1-ன் படி]

$\therefore$ $\sim$ ஒரு டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு [7–6·1-ன் படி]

$\therefore$ $\sim$ ஒரு சமத்துவத் தொடர்பு.

தேற்றம் 8–4·4-ன் படி, $\sim$ என்ற சமத்துவத் தொடர்பு $\mathbb{F}$-ல் உள்ள உறுப்புகளைச் சமத்துவ இனங்களாகப் (equivalent classes)

பிரிக்கிறது. ஒவ்வொரு சமத்துவ இனத்திலும் உள்ள கணங்கள் அனைத்தும் எண்ணளவில் சமத்துவமானவை.

$\mathbb{R}$-ன் உட்கணங்களில் இடைவெளிகள் (Intervals) முக்கியமானவை. இந்த அத்தியாயத்தில் இவைகள் திரும்பத் திரும்ப வரும். எனவே, இவைகளின் வகைகளையும், குறியீடுகளையும் தெரிந்து கொள்வோம்.

10–2·3. இடைவெளிகளின் வரையறைகளும் குறியீடுகளும்

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ எனில்,

(i) $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \}$ ஐ அடைத்த இடைவெளி (closed interval) என்கிறோம். இதை $[a, b]$ என எழுதுகிறோம்.

(ii) $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ ஐத் திறந்த இடைவெளி (open interval) என்கிறோம். இதை (a, b) என எழுதுகிறோம்.

(iii) $\{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b \}$ ஐ அடைத்த-திறந்த இடைவெளி (closed-open interval) என்கிறோம். இதை $[a, b)$ என எழுதுகிறோம்.

(iv) $\{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \}$ ஐத் திறந்த-அடைத்த இடைவெளி (open-closed interval) என்கிறோம். இதை $(a, b]$ என எழுதுகிறோம்.

அடுத்தத் தேற்றத்திலிருந்து இரு முக்கிய சமத்துவக் கணங்களைத் தெரிந்து கொள்வோம்.

10–2·4. தேற்றம்

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ எனில், அப்பொழுது

$$(0, 1) \sim (a, b)$$

நிறுவல் :

$f : (0, 1) \longrightarrow (a, b)$ என்ற சார்பானது

$$\forall\, x \in (0, 1),\quad f(x) = a + (b - a)\, x$$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$\Longrightarrow a + (b - a)\, x_1 = a + (b - a)\, x_2$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow (b - a)\, x_1 = (b - a)\, x_2$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ [$\because b - a \neq 0$]

$\therefore f$ ஓர் $1-1$ சார்பு [9–5·5-ன் படி]

$y \in (a, b)$

$\Longrightarrow a < y < b$ [10–2·3(ii)-ன் படி]

$\Longrightarrow 0 < y - a < b - a$

$\Longrightarrow 0 < \dfrac{y-a}{b-a} < 1$ [$\because b - a \neq 0$]

$\Longrightarrow 0 < x < 1, \; x = \dfrac{y-a}{b-a}$

$$\Longrightarrow \exists\, x \in (0, 1) \ni f(x) = a + (b-a)\,x$$
$$= a + (b-a)\frac{(y-a)}{(b-a)}$$
$$= a + (y-a)$$
$$= y$$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore$ $f : (0, 1) \longrightarrow (a, b)$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

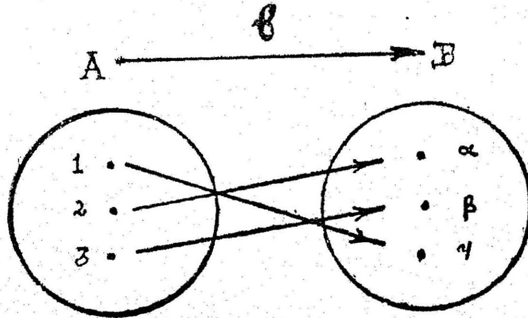
$\therefore$ $(0, 1) \sim (a, b)$. [10-2·1-ன் படி]

10–2·2-ன் படி, $\sim$ ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு. எனவே,

$(0, 1) \sim (a, b) \Longrightarrow (a, b) \sim (0, 1)$. ஆகவே, எந்த ஒரு திறந்த இடைவெளியும் அலகு இடைவெளி (unit interval) $(0, 1)$-க்கு எண்ணளவில் சமத்துவமானது.

கீழ் வருபவை எண்ணளவில் சமத்துவமான கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்.

10–2·5. எடுத்துக்காட்டு



படம் 40

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ என்க. படம் 40 $f:$ $A \longrightarrow B$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பை வரையறுக்கிறது. எனவே,

$$A \sim B$$

10–2·6. எடுத்துக்காட்டு

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $T = \{3, 6, 9, \ldots\}$ என்க.

$f: N \longrightarrow T$ என்ற சார்பானது, $\forall\, x \in N, f(x) = 3x$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு என்பது தெளிவு.

$$\therefore \quad N \sim T$$

எனவே, N என்ற முடிவில்லாக் கணம் அதனுடைய ஒரு முறையான உட்கணம் T-க்கு எண்ணளவில் சமத்துவமாக இருக்கிறது. இந்தப் பண்பு முடிவில்லாக் கணங்களுக்கு மட்டுமே உள்ள சிறப்புப் பண்பு. இவ்வுண்மையை அடிப்படையாய் வைத்து முடிவில்லாக் கணங்களுக்கும் முடிவுள்ள கணங்களுக்கும் புதிய வரையறைகள் கொடுக்கலாம். மேலே கூறப்பட்ட சிறப்புப் பண்பு முடிவுள்ள கணங்களுக்குக் கிடையாது என்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

10–2·7. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$ என்க. அப்பொழுது ϕ, B, C என்பவை மட்டுமே A-ன் முறையான உட்கணங்கள். ϕ-ல் உறுப்புகளே இல்லாததால், A-லிருந்து ϕ-க்குச் சார்பு எதுவும் கிடையாது. எனவே, $A \not\sim \phi$.

B-ல் ஓர் உறுப்பு மட்டுமே இருப்பதால், A-லிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பு மட்டுமே உண்டு. அது

$f = \{(1, 1), (2, 1)\}$ ஆகும்.

$1 \neq 2$. ஆனால் $f(1) = 1 = f(2)$.

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பல்ல [9–5·5-ன் படி]

$\therefore$ f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பல்ல

$\therefore$ $A \not\sim B$.

இதேபோல், $A \not\sim C$.

எனவே, A என்ற முடிவுள்ள கணம் அதனுடைய முறையான உட்கணம் எதற்கும் எண்ணளவில் சமத்துவமானதல்ல. இது எல்லா

முடிவுள்ள கணங்களுக்கும் பொருந்தும். ஆகவே, எந்த ஒரு முடிவுள்ள கணமும் அதன் முறையான உட்கணம் எதற்கும் எண்ணளவில் சமத்துவமானதல்ல.

10–3. முடிவில்லாக் கணங்களும், முடிவுள்ள கணங்களும் (Infinite sets and Finite sets)

10–3·1. வரையறை

ஒரு கணம் அதன் முறையான உட்கணம் ஏதேனும் ஒன்றுக்காவது எண்ணளவில் சமத்துவமாக இருந்தால் இருந்தால்தான், அது ஒரு முடிவில்லாக் கணம் (infinite set) எனப்படும். இப்படி இல்லாவிட்டால் (otherwise) அது ஒரு முடிவுள்ள கணம் (f inite set எனப்படும். அதாவது, ஒரு கணம் அதன் முறையான உட்கணம் எதற்கும் எண்ணளவில் சமத்துவமாக இல்லாதிருந்தால் இல்லாதிருந்தால்தான், அது ஒரு முடிவுள்ள கணம்.

அடுத்து முடிவில்லாக் கணத்திற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

10–3·2. எடுத்துக்காட்டு

$$a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ A = (a, b),\ B = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \text{ என்க.}$$

அப்பொழுது B ஆனது A-ன் ஒரு முறையான உட்கணம்.

$f : A \longrightarrow B$ என்ற சார்பானது

$\forall\, x \in A,\ f(x) = \dfrac{x}{2}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

அப்பொழுது,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \qquad [f\text{-ன் வரையறைப்படி}]$$

$$\implies x_1 = x_2$$

$$\therefore\ f \text{ ஓர் } 1-1 \text{ சார்பு.} \qquad [9\text{–}5\cdot5\text{-ன் படி}]$$

$$y \in B \implies \frac{a}{2} < y < \frac{b}{2} \qquad [10\text{–}2\cdot3\text{(ii)-ன் படி}]$$

$$\implies a < 2y < b$$

$$\implies a < x < b,\ \ x = 2y$$

$$\implies \exists\, x \in A \ni f(x) = \frac{x}{2} = y$$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore$ $f : A \longrightarrow B$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore$ $A \sim B$ [10–2·1-ன் படி]

ஆனால் B ஆனது A-ன் ஒரு முறையான உட்கணம்,

$\therefore$ $A = (a, b)$ ஒரு முடிவில்லாக் கணம். [10–3·1-ன் படி]
இதேபோல், $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ என்ற இடைவெளிகளும் முடிவில்லாக் கணங்கள் என நிறுவலாம்.

கணங்களை 'எண்ணளவு சமத்துவம்' என்ற கருத்தின் துணை கொண்டு முடிவில்லாக் கணங்கள், முடிவுள்ள கணங்கள் என்ற இரு வகைகளாகப் பிரித்தோம். அடுத்து, முடிவில்லாக் கணங்களை N என்ற கணத்தின் துணைகொண்டு இரு வகைகளாகப் பிரிப் போம்.

10–4. டெனியூமெரபிள் கணங்கள் (Denumerable Sets)

10–4·1. வரையறை

$A \sim N$ என இருந்தால் இருந்தால்தான், கணம் A ஆனது ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் (denumerable set) எனப்படும். இதை எனியூமெரபிள் கணம் (enumerable set) என்றும் அழைப்ப துண்டு.

N ஒரு முடிவில்லாக் கணம். எனவே, 10–4·1-ன் படி, ஒவ்வொரு டெனியூமெரபிள் கணமும் ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

அடுத்து, டெனியூமெரபிள் கணத்திற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு பார்ப்போம்.

10–4·2. எடுத்துக்காட்டு

$S = \{ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots \}$ என்க.

$f : N \longrightarrow S$ என்ற சார்பானது

$\forall\, n \in N, f(n) = n^2$ என வரையறுக்கப்பட்டால்,

அப்பொழுது,

$f(m) = f(n) \Longrightarrow m^2 = n^2$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow m = n$

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பு. [9–5·5-ன் படி]

$s \in S \Longrightarrow \exists\, n \in N \ni s = n^2$

$\Longrightarrow \exists\, n \in N \ni f(n) = n^2 = s$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore$ f ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore$ $N \sim S$ [10–2·1-ன் படி]

$\therefore$ $S \sim N$ [$\because$ $\sim$ சமச்சீரானது]

$\therefore$ S ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் [10–4·1-ன் படி]

ஒரு கணத்தை டெனியூமெரபிள் கணம் என நிறுவ அடுத்து வரும் தேற்றம் துணை செய்யும்.

10–4·3. தேற்றம்

கணம் A-ன் அனைத்து உறுப்புகளையும், வெவ்வேறு (distinct) உறுப்புகளால் ஆன ஒரு முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியாக (infinite sequence) எழுத முடிந்தால் முடிந்தால்தான், A ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

நிறுவல் :

A ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்

$\Longleftrightarrow A \sim N$ [10-4·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow N \sim A$ [$\because$ $\sim$ சமச்சீரானது]

$\Longleftrightarrow \exists\, f : N \longrightarrow A$ என்ற பைஜெக்டிவ் சார்பு [10–2·1-ன் படி]

$\Longleftrightarrow [f(N) = A] \wedge [i, j \in N, i \neq j \Longrightarrow f(i) \neq f(j)]$

[$\because$ f ஒரு முழுச் சார்பு, மற்றும் 1—1 சார்பு]

$\Longleftrightarrow [A = \{f(n) \mid n \in N\}] \wedge [i, j \in N,\ i \neq j \Longrightarrow f(i) \neq f(j)]$

10–4·4. எடுத்துக்காட்டு

$A = \left\{\frac{1}{1^3}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \ldots\right\}$ என்க. அப்பொழுது

$A = \left\{\frac{1}{n^3} \mid n \in N\right\} \wedge \left[i, j \in N, i \neq j \Longrightarrow \frac{1}{i^3} \neq \frac{1}{j^3}\right]$

$\therefore$ A ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் [10–4·3-ன் படி]

வெற்றுக் கணம் ஒரு முடிவுள்ள கணம். அதில் உறுப்புகளே இல்லை. ஆகவே, அதன் உறுப்புகளை எண்ணத் தேவையில்லை. A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற முடிவுள்ள கணம் எனில், அதன் உறுப்புகள் அனைத்தையும் $1, 2, 3, \ldots, n$ என எண்ண முடியும். தேற்றம் 10–4·3-ன் படி, ஒவ்வொரு டெனியூமெரபிள் கணத்தின் உறுப்புகள் அனைத்தையும் $1, 2, 3, 4, \ldots$ என எண்ண முடியும். எனவே, 'எண்ண முடியும்' என்பதன் அடிப்படையில், முடிவுள்ள கணங்களையும் டெனியூமெரபிள் கணங்களையும் ஒரே வகையின் கீழ்க் கொண்டு வரலாம்.

10–5. எண்ணிடத்தக்க கணங்களும் எண்ணிடத்தகாத கணங்களும் (Countable sets and Uncountable sets)

10–5·1. வரையறை

கணம் A ஆனது ஒரு முடிவுள்ள கணமாக அல்லது ஒரு டெனியூமெரபிள் கணமாக இருந்தால் இருந்தால்தான், அது ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம் (countable set) எனப்படும்.

கீழ் வருபவை எண்ணிடத்தக்க கணத்திற்குச் சில எடுத்துக் காட்டுகள்.

10–5·2. எடுத்துக்காட்டு

A = {அறம், பொருள், இன்பம்} ஒரு முடிவுள்ள கணம். எனவே, 10–5·1-ன் படி, A ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம்.

10–5·3. எடுத்துக்காட்டு

$A = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\}$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம். எனவே, 10–5·1-ன் படி, A ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம்.

முடிவில்லாக் கணங்களில் டெனியூமெரபிள் கணங்கள் ஒரு வகைக் கணங்கள் என அறிவோம். இனி இரண்டாம் வகையைப் பார்ப்போம்.

10–5·4. வரையறை

ஒரு முடிவில்லாக் கணம் A ஆனது N-க்கு எண்ணளவில், சமத்துவமாக இல்லாதிருந்தால் இல்லாதிருந்தால்தான், A ஐ ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம் (uncountable set) என்கிறோம். இதை டெனியூமெரபிள் அல்லாத கணம் (non-denumerable set) என்றும் அழைப்பதுண்டு.

அடுத்து, சில முக்கிய எண்ணிடத்தகாத கணங்களைத் தெரிந்து கொள்வோம்.

10-5·5. தேற்றம்

$A = (0, 1)$ என்ற திறந்த இடைவெளி ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்.

நிறுவல் :

முடியுமானால், A ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணமாக இருக்கட்டும். அப்பொழுது, 10-5·1-ன் படி, A ஒரு முடிவுள்ள கணமாக இருக்க வேண்டும் அல்லது ஒரு டெனியூமெரபிள் கணமாக இருக்க வேண்டும். ஆனால், 10-3·2-ன் படி, A ஒரு முடிவில்லாக் கணம். ஆகவே, A ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம். எனவே, 10-4·3-ன் படி, A-ன் உறுப்புகள் அனைத்தையும்,

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ என வரிசைப்படுத்தி எழுத முடியும். இவைகளைக் கீழ்க் காணுமாறு முடிவில்லாத் தசமங்களாக (infinite decimals) எழுதலாம்.

$$\begin{array}{lcl}
a_1 & = & 0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1m}\ \ldots \\
a_2 & = & 0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2m}\ \ldots \\
a_3 & = & 0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \ldots\ a_{3m}\ \ldots \\
\vdots & & \vdots \\
a_m & = & 0.\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \ldots\ a_{mm}\ \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

மேலே எழுதப்பட்டுள்ள தசமங்களில்,

$\forall\ i, j \in N,\ a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\forall\ n \in N,\quad b_n = \begin{cases} a_{nn} + 1, & a_{nn} < 5 \text{ எனில்} \\ a_{nn} - 1, & a_{nn} \geqslant 5 \text{ எனில்} \end{cases}$

என்க. அப்பொழுது,

$0 < 0.\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots < 1$

$\therefore\ 0.\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots = a \in A \qquad \ldots (1)$

b_n என்பதன் வரையறைப்படி, $\forall\ n \in N,\ b_n \neq a_{nn}$. எனவே, $\forall\ n \in N,\ a \neq a_n$

$\therefore\ a \notin A \qquad \ldots (2)$

இப்பொழுது (1), (2) ஆகிய இரண்டும் முரண்படுகின்றன. எனவே, A ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணமாக இருக்க முடியாது.

$\therefore$ A ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்.

10–5·5-லிருந்து, $[0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1]$ என்ற மூன்று இடைவெளிகளும் எண்ணிடத்தகாத கணங்கள் என்பது தெளிவு. 10–2·4-ன் படி, $(0, 1) \sim (a, b)$. எனவே, (a, b) ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம். ஆகவே, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ என்பவைகளும் எண்ணிடத்தகாத கணங்கள். இனி $\mathbb{R}$-ன் தன்மையைப் பார்ப்போம்.

10–5·6. தேற்றம்

$\mathbb{R}$ ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்.

நிறுவல் :

$$A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ என்க.}$$

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ என அறிவோம்.

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

$\forall\, x \in A, \quad f(x) = \tan x$

என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$f(\alpha) = f(\beta) \Longrightarrow \tan \alpha = \tan \beta \qquad \text{[f-ன் வரையறைப் படி]}$$
$$\Longrightarrow \alpha = \beta + r\pi, \qquad r \in Z$$
$$\Longrightarrow \alpha - \beta = r\pi, \qquad r \in Z$$
$$\Longrightarrow |\alpha - \beta| = |r|\,\pi, \; r \in Z$$

ஆனால் $|\alpha - \beta| < \pi$ $\qquad [\because \alpha, \beta \in A]$

$\therefore \quad |r| = 0$

$\therefore \quad r = 0$

$\therefore \quad f(\alpha) = f(\beta) \Longrightarrow \alpha = \beta$

$\therefore \quad f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ஓர் 1 – 1 சார்பு. $\qquad$ [9–5·5-ன் படி]

y என்பது $\mathbb{R}$ என்பதன் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு என்க. அப்பொழுது $y \gtrless 0$ என்பதைப் பொறுத்து $P(1, y)$ என்ற

புள்ளி தேக்காட்டின் தளத்தின் (Cartesian plane) முதல் காற் பகுதியில் (first quadrant), X-அச்சில் அல்லது நான்காம் காற் பகுதியில் (fourth quadrant) உள்ளது.

எனவே, $-\frac{\pi}{2} < \underline{|XOP} = \theta < \frac{\pi}{2}$

ஆகவே,

$$y \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\, \theta \in A \ni f(\theta) = \tan\theta = \frac{y}{1} = y$$

$\therefore\ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore\ f$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore\ A \sim \mathbb{R}$ [10–2·1-ன் படி]

ஆனால் A ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்

$\therefore\ \mathbb{R}$ ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்.

டெனியூமெரபிள் கணங்கள், எண்ணிடத்தக்க கணங்கள், எண்ணிடத்தகாத கணங்கள் ஆகியவற்றிற்கு எடுத்துக்காட்டுகள் பார்த்தோம். இனி, இவைகளின் பண்புகள் சிலவற்றைக் காண்போம்.

10–5·7. தேற்றம்

ஒவ்வொரு முடிவில்லாக் கணமும் குறைந்தது ஒரு டெனியூமெரபிள் கணத்தை உட்கணமாகக் கொண்டுள்ளது.

நிறுவல் :

A என்பது ஒரு முடிவில்லாக் கணம் என்க. அப்பொழுது $A \neq \phi$

$\therefore\ \exists\, a_1 \in A$

$\therefore\ \{a_1\} \subset A$

இப்பொழுது

$$A - \{a_1\} = \phi \Longrightarrow A = \{a_1\}$$

$\Longrightarrow A$ ஒரு முடிவுள்ள கணம்.

ஆனால், எடுகோள்படி, A ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

$\therefore\ A - \{a_1\} = \phi$

$\therefore \quad \exists\, a_2 \in [A - \{a_1\}]$

$\therefore \quad \{a_1, a_2\} \subset A$

இப்பொழுது,

$A - \{a_1, a_2\} = \phi \Longrightarrow A = \{a_1, a_2\}$

$\Longrightarrow$ A ஒரு முடிவுள்ள கணம்

ஆனால், எடுகோள்படி, A ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

$\therefore \quad A - \{a_1, a_2\} \neq \phi \; ; \quad a_1 \neq a_2.$

$\therefore \quad \exists\, a_3 \in [A - \{a_1, a_2\}]$

$\therefore \quad \{a_1, a_2, a_3\} \subset A$

இப்பொழுது,

$A - \{a_1, a_2, a_3\} = \phi \Longrightarrow A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$\Longrightarrow$ A ஒரு முடிவுள்ள கணம்

ஆனால், எடுகோள்படி, A ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

$\therefore \quad A - \{a_1, a_2, a_3\} \neq \phi; \quad a_1, a_2, a_3$ வெவ்வேறானவை.

இதே மாதிரித் தொடர்ந்து செய்து A-விருந்து $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ என்ற வெவ்வேறான உறுப்புகளை எடுத்ததாகக் கொள்க. அப்பொழுது,

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \subset A$$

$$A - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} = \phi$$

$\Longrightarrow A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$

$\Longrightarrow$ A ஒரு முடிவுள்ள கணம்

ஆனால், எடுகோள்படி, A ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

$\therefore \quad A - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \neq \phi$

$\therefore \quad \exists\, a_{n+1} \in [A - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}]$

$\therefore \quad \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}\} \subset A.$

இப்பொழுது,

$$A - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}\} = \phi$$

$$\Longrightarrow A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$$

$\Longrightarrow$ A ஒரு முடிவுள்ள கணம்

ஆனால், எடுகோள்படி, A ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

$\therefore \quad A - \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}\} \neq \phi; \; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ வெவ்வேறானவை.

எனவே, இந்தச் செயலைத் திரும்பச் செய்து, A-லிருந்து a_1, a_2, a_3, ... என்ற வெவ்வேறான உறுப்புகளை எடுக்கமுடியும்.

$D = \{ a_n \mid n \in N \}$ என்க. அப்பொழுது $\forall i, j \in N, i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$. எனவே, 10–4·3-ன் படி, D ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம். மேலும் $D \subset A$. ஆகவே, A என்ற முடிவில்லாக் கணம் டெனியூமெரபிள் கணம் D ஐ ஓர் உட்கணமாகக் கொண்டுள்ளது.

10-5·8. தேற்றம்

ஒரு டெனியூமெரபிள் கணத்தின் எந்த ஓர் உட்கணமும் ஒரு முடிவுள்ள கணம் அல்லது ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

நிறுவல் :

A ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் என்க. அப்பொழுது, 10–4·3–ன் படி, A-ன் உறுப்புகள் அனைத்தையும்

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

என்ற வெவ்வேறு உறுப்புகளால் ஆன ஒரு முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியாக எழுத முடியும்.

B என்பது A-ன் ஏதேனும் ஓர் உட்கணம் என்க. $B = \phi$ எனில், அப்பொழுது B ஒரு முடிவுள்ள கணம். எனவே, நிறுவல் முடிந்தது. $B \neq \phi$ எனில், B-ன் உறுப்புகளில், தொடர்ச்சி (1)-ல் முதலில் வருவது a_{n_1} என்க; B-ன் உறுப்புகளில், தொடர்ச்சி (1)-ல் a_{n_1}-க்குப் பின்னால் வருவனவற்றுள் முதலில் வருவது a_{n_2} என்க; B-ன் உறுப்புகளில் தொடர்ச்சி (1)-ல் a_{n_2}-க்குப் பின்னால் வருவன வற்றுள் முதலில் வருவது a_{n_3} என்க; இம் மாதிரி எடுத்துக் கொண்டு வந்தால், அப்பொழுது

$$B = \{ a_{n_1}, \ a_{n_2}, \ a_{n_3}, \ . \ . \ . \}$$

$S = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ என்க. அப்பொழுது $S \sim B$. எனவே, S ஒரு முடிவுள்ள கணம் என்றால், அப்பொழுது B-ம் ஒரு முடிவுள்ள கணம். S ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் என்றால், அப்பொழுது B-ம் ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

10–5·9. கிளைத் தேற்றம்

ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணத்தின் ஒவ்வோர் உட்கணமும் எண்ணிடத்தக்கது.

10–5·10. தேற்றம்

$\forall i \in N, A_i$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்,
$\forall i, j \in N, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \phi$ எனில், அப்பொழுது

$\bigcup_{i \in N} A_i$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்

அல்லது

இரட்டை இரட்டையாகப் பொது உறுப்பில்லாத டெனியூமெரபிள் கணங்களால் ஆன ஒரு டெனியூமெரபிள் கணக் குடும்பத்தின் கூட்டு ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

நிறுவல்

$\forall i \in N$, A_i ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம். எனவே, 10–4·3-ன் படி, A_i-ன் உறுப்புகள் அனைத்தையும் கீழ்க் காணுமாறு முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியாக எழுத முடியும்.

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
A_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & \cdot & \cdot \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & \cdot & \cdot \\
A_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_n: & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right\} \quad (1)$$

$\bigcup_{i \in N} A_i = \{ a_{ij} \mid (i, j) \in N \times N \} = A$ என்க.

எடுகோள்படி, $\forall i, j \in N, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \phi$.

$\therefore \quad \forall (i, j), (r, s) \in N \times N, (i, j) \neq (r, s) \implies a_{ij} \neq a_{rs}$

$\therefore$ A-ன் உறுப்புகள் வெவ்வேறானவை.

A-ன் உறுப்புகளை (1)-ல் காட்டியவாறு பகுதிகளாகப் பிரிப்போமானால், m ஆவது பகுதியில் m உறுப்புகள் உள்ளன.

a_{ij} ஆனது m ஆவது பகுதியில் உள்ளது.

$$\Longleftrightarrow i + j = m + 1$$

m ஆவது பகுதியுள்ள a_{ij}-ன் முதல் கீழ்க் குறி (first suffix) m-லிருந்து 1 வரை குறைகிறது (decreases); இரண்டாம் கீழ்க் குறி 1-லிருந்து m வரை உயர்கிறது (increases).

இப்பொழுது, A-ன் உறுப்புகள் அனைத்தையும் வெவ்வேறு உறுப்புகளால் ஆன ஒரு முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியாகக் கீழ்க் காணுமாறு எழுதலாம்.

$$a_{11};\ a_{21},\ a_{12};\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13};\ \ldots\ldots$$

$\therefore$ A ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் [10–5·3-ன் படி]

10–5 10-ல், $\forall i, j \in N, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \phi$ என்ற நிபந்தனையை நீக்கிவிட்டால்,

$$a_{11},\ a_{21},\ a_{12},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13};\ \ldots\ldots$$

என்ற முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியின் எல்லா உறுப்புகளும் வெவ்வேறானவை அல்ல. எனவே, சில உறுப்புகள் பலமுறை எழுதப்பட்டிருக்கலாம். அப்படிப் பல முறை எழுதப்பட்டிருக்கும் ஒவ்வோர் உறுப்பையும், அது தோன்றுகின்ற முதல் இடம் தவிர மற்ற இடங்களில் நீக்கிவிட்டால், எஞ்சி நிற்பது வெவ்வேறு உறுப்புகளால் ஆன ஒரு முடிவில்லாத் தொடர்ச்சியாகும். ஆகவே, $\bigcup_{i \in N} A_i$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம். இவ்வுண்மையைத் தேற்றமாகக் கீழே தருகிறோம்.

10–5·11. தேற்றம்

$\forall i \in N$, A_i ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் எனில், அப்பொழுது $\bigcup_{i \in N} A_i$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

அல்லது

டெனியூமெரபிள் கணங்களால் ஆன ஒரு டெனியூமெரபிள் கணக் குடும்பத்தின் கூட்டு ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

10–5·12. கிளைத் தேற்றம்

எண்ணிடத்தக்க கணங்களால் ஆன ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணக் குடும்பத்தின் கூட்டு ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம்.

10–5·13. தேற்றம்

A ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம், B ஆனது A-ன் ஓர் எண்ணிடத்தக்க உட்கணம் எனில், அப்பொழுது $A - B$ ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்.

நிறுவல் :

முடியுமானால், $A - B$ ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம் என்க. எடுகோள்படி, B ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம். எனவே, 10–5·12-ன் படி, $(A-B) \cup B$ ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம்.

ஆனால் $(A-B) \cup B = A$ [$\because$ எடுகோள் படி, $B \subset A$]

$\therefore$ A ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம்.

ஆனால், எடுகோள் படி, A ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்.

இது ஒரு முரண்பாடு.

$\therefore$ $A - B$ ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணமாக இருக்க முடியாது.

$\therefore$ $A - B$ ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம்

10–6. மாதிரிக் கணக்குகள்

0–6·1. மாதிரிக் கணக்கு

A என்பது ஏதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம் எனில், $A \sim A \times \{1\}$ என நிறுவுக.

$f: A \longrightarrow A \times \{1\}$ என்ற சார்பானது

$\forall x \in A$, $f(x) = (x, 1)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow (x_1, 1) = (x_2, 1)$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow x_1 = x_2$ [5–2.2-ன் படி]

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பு. [9–5·5-ன் படி]

$(x, 1) \in A \times \{1\} \Longrightarrow \exists\, x \in A \ni f(x) = (x, 1)$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore$ $f: A \longrightarrow A \times \{1\}$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore$ $A \sim A \times \{1\}$ [10–2·1-ன் படி]

10–6·2. மாதிரிக் கணக்கு

$[0, 1) \sim (0, 1]$ என நிறுவுக.

$f: [0, 1) \longrightarrow (0, 1]$ என்ற சார்பானது

$\forall\ x \in [0, 1)$, $f(x) = 1 - x$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அப்பொழுது

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 1 - x_1 = 1 - x_2$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow -x_1 = -x_2$

$\Longrightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பு. [9–5·5-ன் படி]

$y \in (0, 1] \Longrightarrow 0 < y \leqslant 1$ [10–2·3 (iv)-ன் படி]

$\Longrightarrow 0 > -y \geqslant -1$

$\Longrightarrow 1 > 1 - y \geqslant 0$

$\Longrightarrow 0 \leqslant 1 - y < 1$

$\Longrightarrow 0 \leqslant x < 1, \quad x = 1 - y$

$\Longrightarrow \exists\ x \in [0, 1) \ni f(x) = 1 - x = y$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு [9–5·8-ன் படி]

$\therefore$ $f : [0, 1) \longrightarrow (0, 1]$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore$ $[0,1) \sim (0, 1]$

10–6·3. மாதிரிக் கணக்கு

A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், $(A \times B) \times C \sim A \times B \times C$ என நிறுவுக.

$f : (A \times B) \times C \longrightarrow A \times B \times C$ என்ற சார்பானது $\forall\ ((a, b), c) \in (A \times B) \times C$, $f[((a, b), c)] = (a, b, c)$ என வரையறுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$f[((l, m), n)] = f[((p, q), r)]$

$\Longrightarrow (l, m, n) = (p, q, r)$ [f-ன் வரையறைப் படி]

$\Longrightarrow l = p, m = q, n = r$ [5–2·6-ன் படி]

$\Longrightarrow (l, m) = (p, q) \wedge n = r$ [5–2 2-ன் படி]

$\Longrightarrow ((l, m), n) = ((p, q), r)$ [5–2·2-ன் படி]

$\therefore$ f ஓர் $1-1$ சார்பு. [9–5·5-ன் படி]

$(x, y, z) \in A \times B \times C$

$\Longrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C$ [5-5·1-ன் படி]

$\Longrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge z \in C$ [5-3·1-ன் படி]

$\Longrightarrow \exists ((x, y), z) \in (A \times B) \times C \ni f[((x, y), z)]$
$= (x, y, z)$

$\therefore$ f ஒரு முழுச் சார்பு. [9-5·8-ன் படி]

$\therefore$ $f: (A \times B) \times C \longrightarrow A \times B \times C$ ஒரு பைஜெக்டிவ் சார்பு

$\therefore$ $(A \times B) \times C \sim A \times B \times C$

10-6·4 மாதிரிக் கணக்கு

$N \times N$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் என நிறுவுக.

$N \times N$ என்ற கணத்தின் உறுப்புகள் அனைத்தையும் கீழ்க் காணுமாறு அணி வடிவில் எழுதலாம்.

$$\begin{matrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots & (1, n) & \dots \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots & (2, n) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ (m, 1) & (m, 2) & (m, 3) & \dots & (m, n) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{matrix}$$

$\forall i \in N, A_i = \{(i, 1), (i, 2), (i, 3), \dots\}$ என்க. அப்பொழுது

(a) A_i ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்

(b) $\forall i, j \in N, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \phi$

(c) $N \times N = \bigcup_{i \in N} A_i$

எனவே, 10–5·10-ன் படி, $N \times N$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

10-6·5. மாதிரிக் கணக்கு

Q ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் என நிறுவுக.

(ஆக்ரா ப. க. 1953, 1956, 1958, 1961)
(காசி ப. க. 1960, 1965, 1969)
(விக்ரம் ப. க. 1961, 1963)
(கான்பூர் ப. க. 1968)
(பஞ்சாப் ப. க. 1969)

Q^+ என்பது நேர் விகிதமுறு எண்களின் கணம் (set of all positive rational numbers), Q^- என்பது எதிர் விகிதமுறு எண்களின் கணம் (set of all negative rational numbers) எனில், அப்பொழுது $Q = Q^+ \cup Q^{-1} \cup \{0\}$.

Q^+ என்பதன் உறுப்புகள் அனைத்தையும் கீழ்க் காணுமாறு அணி வடிவில் எழுதலாம்.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{n} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{2}{n} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{m}{1} & \frac{m}{2} & \frac{m}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{m}{n} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

$\forall\, i \in N,\ A_i = \left\{ \frac{i}{1},\ \frac{i}{2},\ \frac{i}{3}, \ldots \right\}$ என்க. அப்பொழுது

(a) A_i ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

(b) $Q^+ = \bigcup_{i \in N} A_i$

எனவே, 10–5·11-ன் படி, Q^+ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்

இதேபோல், Q^- ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

$\therefore$ $Q^+, Q^-\ \{0\}$ என்பவை எண்ணிடத்தக்க கணங்கள்

[10–5·1-ன் படி

$\therefore$ $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ ஓர் எண்ணிடத்தக்க கணம்

[10–5·12-ன் படி]

ஆனல், Q^+ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

$\therefore$ Q ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம்.

பயிற்சி 10

1. $[2, 4] \sim [1, 2]$ என நிறுவுக. (காசி ப. க. 1970)

2. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ எனில், $[0, 1] \sim [a, b]$ என நிறுவுக.

3. $[0, 1] \sim (0, 1)$ என நிறுவுக.

4. $[0, 1] \sim [0, 1)$ என நிறுவுக.

5. $\mathbb{C} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ என நிறுவுக.

6. A, B என்பன எவையேனும் இரு வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், $A \times B \sim B \times A$ என நிறுவுக.

7. A, B, C என்பன எவையேனும் மூன்று வெற்றற்ற கணங்கள் எனில், $A \times (B \times C) \sim A \times B \times C$ என நிறுவுக.

8. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் என நிறுவுக.

9. Z ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் என நிறுவுக.

10. A, B என்பவை எவையேனும் இரு டெனியூமெரபிள் கணங்கள் எனில், $A \times B$-ம் ஒரு டெனியூமெரபிள் கணம் என நிறுவுக.

11. எல்லா விகிதமுறா எண்களின் கணம் (set of all irrational numbers) ஓர் எண்ணிடத்தகாத கணம் என நிறுவுக.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(Bibliography)

	TITLE		AUTHOR(S)
1.	Naive Set Theory	—	Paul R. Halmos.
2.	Sets, Logic and Axiomatic Theories	—	Robert R. Stoll.
3.	Sets, Relations and Functions	—	Myra McFadden, J. William Moore, and Wendell I. Smith.
4.	Sets, Relations and Functions	—	James F. Gray.
5.	Finite Mathematics with Business Applications	—	John G. Kemeny, Arthur Schleifer, J. L. Snell and Gerald L. Thompson.
6.	Introduction to Modern Algebra	—	John L. Kelley.
7.	Sets and Boolean Algebra	—	M. Rueff and M. Jeger.
8.	Theory and Problems of Modern Algebra	—	Frank Ayres, Jr.
9.	Theory and Problems of Set Theory and Related Topics	—	Seymour Lipschutz.
10.	Set Theory	—	Charles C. Pinter.
11.	Introduction to Topology and Modern Analysis	—	G. F. Simmons.
12.	Probability An Introduction	—	Samuel Goldberg.
13.	The Structure of The Real Number System	—	Leon W. Cohen. and Gertrude Ehrlich.
14.	Introduction to Logic	—	Patrick Suppes.
15.	Mathematics for A Liberal Education	—	Merlin M. Ohmer.

கலைச்சொற்கள்

A

Absorption Law — தன்மயமாக்கும் விதி
Abstract — அருவ
Addition — கூட்டல்
Algebra — இயற்கணிதம்
Antecedent — ஏது
Arithmetic — எண் கணிதம்

B

Braces — வில்லடைப்புகள்

C

Class — இனம்
Class, Equivalence — சமத்துவ இனம்
Co-domain — துணை அரங்கம்
Comma — காற்புள்ளி
Colon — முக்காற்புள்ளி
Column — நிரல்
Complement — நிரப்பி
Complement, Absolute — தனி நிரப்பி
Complement, Relative — தொடர்புடைய நிரப்பி
Complementation — நிரப்புதல்
Component — கூறு
Composition of Functions — சார்புகளின் சேர்க்கை
Composition of Permutations — வரிசை மாற்றங்களின் சேர்க்கை
Composition of Relations — தொடர்புகளின் சேர்க்கை
Concept — கருத்து
Condition — நிபந்தனை
Condition, Necessary — வேண்டிய நிபந்தனை
Condition, Sufficient — போதிய நிபந்தனை
Condition, Necessary and Sufficient — வேண்டிய மற்றும் போதிய நிபந்தனை
Congruence Modulo *m* — ஒருங்கிசைவு மட்டு *m*
Conjunction — இணைப்பு

Connective — இணைப்பி
Connective, Sentential — வாக்கிய இணைப்பி
Consequent — விளைவு
Contradiction — முரண்பாடு
Contrapositive — நேர்மாறு-மறுதலை
Converse — மறுதலை
Co-ordinate — கூறு
Correspondence — ஒத்தியைபு
Count — எண்ணு
Countable — எண்ணத்தக்க
Counting — எண்ணுதல்

D

Decimal — தசமம்
Decimal, Infinite — முடிவில்லாத் தசமம்
Definition — வரையறை
Definition, Alternative — மாற்று வரையறை
De Morgan's Law — டி மார்கன் விதி
Denumerable — டெனியூமெரபிள்
Diagonal — மூலைவிட்டம்
Diagonal, Leading — முக்கிய மூலைவிட்டம்
Diagram — விளக்கப்படம்
Diagram, Co-ordinate — கூறு விளக்கப்படம்
Diagram, Euler — ஆய்லரின் விளக்கப்படம்
Diagram, Tree — மர விளக்கப்படம்
Diagram, Venn — வென் விளக்கப்படம்
Difference — வேறுபாடு
Difference Set — வேறுபாட்டுக் கணம்
Difference of Sets — கண வேறுபாடு
Differentiate — வகையிடு
Differentiation — வகையிடல்
Digit — இலக்கம்
Disjointness — பொது உறுப்பின்மை
Disjunction — பிரிப்பு
Distinct — தனித்தனி, வெவ்வேறான
Domain — அரங்கம்

E

Element — உறுப்பு
Element, Equivalent — சமத்துவ உறுப்பு

Element, Identity — முற்றொருமை உறுப்பு
Elementary — தொடக்க நிலை
Enumerable — எனியூமெரபிள்
Equality — சமத்தன்மை
Equation — சமன்பாடு
Equivalence — சமத்துவம்
Equivalence, Numerical — எண்ணளவு சமத்துவம்
Equivalent — சமத்துவமான
Equivalent, Cardinally — முதலெண் அளவில் சமத்துவமான
Equivalent, Numerically — எண்ணளவில் சமத்துவமான

F

Factor — காரணி
Factor, Common — பொதுக் காரணி
Factor, Positive — நேர்க் காரணி
Family of sets — கணக் குடும்பம்
Family of sets, Indexed — குறியிடப்பட்ட கணக்குடும்பம்
Figure — உருவம்
Form — வடிவம்
Form, Basic — அடிப்படை வடிவம்
Form, Set Builder — கணம் கட்டும் வடிவம்
Form, Tabular — பட்டியல் வடிவம்
Formula — வாய்பாடு
Function — சார்பு
Function, Bijective — பைஜெக்டிவ் சார்பு
Function, Composite — சேர்க்கைச் சார்பு
Function, Constant — நிலைச் சார்பு
Function, Identity — முற்றொருமைச் சார்பு
Function, Injective — இன்ஜெக்டிவ் சார்பு
Function, Into — உட்சார்பு
Function, Inverse — நேர்மாறு சார்பு
Function, Invertible — நேர்மாறுடைய சார்பு
Function, Many-one — பல-ஒன்று சார்பு
Function, One-one — ஒன்று-ஒன்று சார்பு
Function, Onto — முழுச் சார்பு
Function, Surjective — சர்ஜெக்ட்டிவ் சார்பு

H

Hypothesis — எடுகோள்
Hypothetical — சார்புற்ற

I

Idempotent Law — தன்னுற்றல் விதி
Identical — ஒரே மாதிரியான
Identity — முற்றொருமை
Image — பிம்பம்
Implication — உணர்த்தல்
Implication, One-way — ஒருவழி உணர்த்தல்
Implication, Two-way — இருவழி உணர்த்தல்
Imply — உணர்த்து
Index — குறி
Index set — குறிக் கணம்
Indexed set — குறியிடப்பட்ட கணம்
Integer — முழு எண்
Intersection — இடைவெட்டு
Intersection, Generalised — பொதுவாக்கப்பட்ட இடைவெட்டு
Intersection set — இடைவெட்டுக் கணம்
Interval — இடைவெளி
Interval, Closed — அடைத்த இடைவெளி
Interval, Closed-open — அடைத்த-திறந்த இடைவெளி
Interval, Open — திறந்த இடைவெளி
Interval Open-closed — திறந்த-அடைத்த இடைவெளி
Interval, Unit — அலகு இடைவெளி
Intuition — உள்ளுணர்வு
Inverse — நேர்மாறு
Inversion — நேர்மாறல்
Involution — இன்வலூஷன்

L

Lattice point — பின்னற் புள்ளி
Law — விதி
Law, Associative — சேர்ப்பு விதி
Law, Commutative — பரிமாற்று விதி
Law, Distributive — பங்கீட்டு விதி
Law of Addition — கூட்டல் விதி
Law of Contraposition — நேர்மாறு-மறுதலை விதி
Law of Detachment — பிரித்தல் விதி
Law of Double Negation — இரட்டை எதிர்மறை விதி
Law of Excluded Middle — நடுப்பொருள் நீக்க விதி

Law of Hypothetical Syllogism — சார்புற்ற முக்கூற்று முடிவின் விதி
Law of Identity — முற்றொருமை விதி
Law of Non-contradiction — முரணுமை விதி
Law of Simplification — சுருக்கல் விதி
Line — கோடு
Line, Horizontal — கிடைக்கோடு
Line, Vertical — நிலைக்குத்துக் கோடு
Logic — அளவையியல்

M

Map — உரு மாற்று, அமைப்பு மாற்று
Mapping — உரு மாற்றம், அமைப்பு மாற்றம்
Matrix — அணி
Matrix Addition — அணிக் கூட்டல்
Matrix Multiplication — அணிப் பெருக்கல்
Matrix Transposition — அணி இடமாற்றல்
Member — உறுப்பு
Method — முறை
Method, Characteristic Property — சிறப்புப் பண்பு முறை
Method, Defining Property — வரையறைப் பண்பு முறை
Method, Roster — பட்டியல் முறை

N

Negation — எதிர்மறை
Net work — பின்னல்
Non zero — பூச்சியமல்லாத
Notation — குறியீடு, குறியீட்டு முறை
Number — எண்
Number, Complex — சிக்கல் எண்
Number, Counting — எண்ணும் எண்
Number, Even — இரட்டை எண்
Number, Irrational — விகிதமுறு எண்
Number, Natural — இயற்கை எண்
Number, Negative — எதிர் எண்
Number, Odd — ஒற்றை எண்
Number, Positive — நேர் எண்
Number, Prime — பகா எண்

Number, Rational — விகிதமுறு எண்
Number, Real — மெய் எண்
Numbers, Relatively Prime — சார் பகா எண்கள்
Number Property — எண் பண்பு
Number Theory — எண் கொள்கை

O

One-to-one correspondence — ஒன்றுக்கு ஒன்ருன ஒத்தியைபு
Operand — செயலுட்படுதி
Operation — செயல்
Operation, Binary — ஈருறுப்புச் செயல்
Operation, Mathematic — கணிதச் செயல்
Operation, n-ary — n-உறுப்புச் செயல்
Operation, Ternary — மூவுறுப்புச் செயல்
Operation, Unary — ஓருறுப்புச் செயல்
Operator — செயலி
Ordered n-tuple — வரிசைப்பட்ட n-மை

P

Pair — இரட்டை
Pair, Ordered — வரிசைப்பட்ட இரட்டை
Pair, Unordered — வரிசைப்படா இரட்டை
Part — பகுதி
Part, Imaginary — கற்பனைப் பகுதி
Part, Real — மெய்ப் பகுதி
Partition — பிரிவினை
Permutation — வரிசை மாற்றம்
Permutation, Composite — சேர்க்கை வரிசை மாற்றம்
Permutation, Identity — முற்றொருமை வரிசை மாற்றம்
Permutation, Inverse — நேர்மாறு வரிசை மாற்றம்
Permutation, nth Degree — n-படி வரிசை மாற்றம்
Plane — தளம்
Plane, Cartesian — தேக்காட்டின் தளம்
Plane, Co-ordinate — கூறுத் தளம்
Pre-image — மூல பிம்பம்
Principle — கோட்பாடு
Product — பெருக்கம்
Probuct Cartesian — தேக்காட்டின் பெருக்கம்
Product, Relative — தொடர்புப் பெருக்கம்

Product set — பெருக்குக் கணம்
Property — பண்பு
Property, Associative — சேர்ப்புப் பண்பு
Property, Commutative — பரிமாற்றுப் பண்பு
Property, Distributive — பங்கீட்டுப் பண்பு
Property, Fundamental — அடிப்படைப் பண்பு
Property, Physical — பௌதிகப் பண்பு

Q

Quantifier — அளவுபடுத்தி
Quantifier, Existential — இருத்தல் அளவுபடுத்தி
Quantifier, Universal — முழுமை அளவுபடுத்தி

R

Range — வீச்சு
Region — பரப்பு (பகுதி)
Region, Closed — அடைத்த பரப்பு
Region, Circular — வட்டப் பரப்பு
Region, Elliptical — நீண்ட வட்டப் பரப்பு
Region, Irregular — ஒழுங்கற்ற பரப்பு
Region, Rectangular — செவ்வகப் பரப்பு
Relation — தொடர்பு
Relation, Antisymmetric — எதிர் சமச்சீர்த் தொடர்பு
Relation, Binary — இருபொருள் தொடர்பு
Relation, Composite — சேர்க்கைத் தொடர்பு
Relation, Diagonal — மூலைவிட்டத் தொடர்பு
Relation, Empty — வெற்றுத் தொடர்பு
Relation, Equivalence — சமத்துவத் தொடர்பு
Relation, Identity — முற்றொருமைத் தொடர்பு
Relation, Inverse — நேர்மாறு தொடர்பு
Relation, *n*–ary — *n*–பொருள் தொடர்பு
Relation, Non-reflexive — பிரதிபலிக்காத் தொடர்பு
Relation, Non-symmetric — சமச்சீரற்ற தொடர்பு
Relation, Non-transitive — டிரான்சிட்டிவ் அல்லாத தொடர்பு
Relation, Partial order — பகுதி வரிசைத் தொடர்பு
Relation, Reflexive — பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு
Relation, Symmetric — சமச்சீர்த் தொடர்பு
Relation, Ternary — முப்பொருள் தொடர்பு

Relation, Transitive — டிரான்சிட்டிவ் தொடர்பு
Relation, Universal — முழுமைத் தொடர்பு
Reversal, Law — முன்பின்னுதல் விதி
Root — மூலம்
Root, Real — மெய் மூலம்
Row — நிரை

S

Sentence — வாக்கியம்
Sentence, Biconditional — இருநிபந்தனை வாக்கியம்
Sentence, Compound — கூட்டு வாக்கியம்
Sentence, Conditional — நிபந்தனை வாக்கியம்
Sentence, Declarative — உறுதி வாக்கியம்
Sentence, Open — திறந்த வாக்கியம்
Sentence, Simple — தனி வாக்கியம்
Sequence — தொடர்ச்சி
Sequence, Infinite — முடிவில்லாத் தொடர்ச்சி
Set — கணம்
Sets, Comparable — ஒப்பிடத்தக்க கணங்கள்
Set, Countable — எண்ணிடத்தக்க கணம்
Set, Denumerable — டெனியூமெரபிள் கணம்
Sets, Disjoint — பொது உறுப்பில் கணங்கள்
Set, Empty — வெற்றுக் கணம்
Set, Enumerable — எனியூமெரபிள் கணம்
Set, Equivalence — சமத்துவக் கணம்
Set, Finite — முடிவுள்ள கணம்
Set, Infinite — முடிவில்லாக் கணம்
Set, Mutually Disjoint — இரட்டை இரட்டையாகப் பொது உறுப்பில் கணங்கள்
Set, Non-denumerable — டெனியூமெரபிள் அல்லாத கணம்
Set, Non-empty — வெற்றற்ற கணம்
Set, Null — வெற்றுக் கணம்
Set, Power — அடுக்குக் கணம்
Set, Quotient — ஈவுக் கணம்
Set, Uncountable — எண்ணிடத்தகாத கணம்
Set, Universal — முழுமைக் கணம்
Set Algebra — கண இயற்கணிதம்
Set Complementation — கண நிரப்புதல்
Set Difference — கண வேறுபாடு

Set Equality — கணச் சமத்தன்மை
Set Inclusion — கண அடங்கல்
Set Intersection — கண இடைவெட்டு
Set Notation — கணக் குறியீடு
Set Operation — கணச் செயல்
Set Theory — கணக் கொள்கை
Set Union — கணக் கூட்டு
Singleton — ஓருறுப்புக் கணம்
Sociology — சமுதாய வாழ்க்கை இயல்
Space — வெளி
Space, Three Dimensional — முப்பரிமாண வெளி
Squaring — வர்க்கப்படுத்தல்
Statement — கூற்று
Statement, Compound — கூட்டுக் கூற்று
Statement, False — பொய்க் கூற்று
Statement, Logically False — அளவையியல் முறைப் படி பொய்க் கூற்று
Statement, Mathematical — கணிதக் கூற்று
Statement, Simple — தனிக் கூற்று
Statement, True — உண்மைக் கூற்று
Subset — உட்கணம்
Subset, Improper — முறையற்ற உட்கணம்
Subset, Proper — முறையான உட்கணம்
Superset — உள்ளடக்கும் கணம்
Syllogism — முக்கூற்று முடிவு
Symbol — குறியீடு
Symmetric difference — சமச்சீர் வேறுபாடு

T

Tautology — டாடாலஜி
Theory of Equations — சமன்பாட்டுக் கொள்கை
Transform — மாறிய வடிவம்
Triple — மும்மை
Triple, Ordered — வரிசைப்பட்ட மும்மை
Truth — உண்மை
Truth, Logical — அளவையியல் உண்மை
Truth Table — உண்மை மதிப்பு அட்டவணை
Truth Table, Basic — அடிப்படை உண்மை மதிப்பு அட்டவணை

Truth Table, Derived — வழிவந்த உண்மை மதிப்பு அட்டவணை
Truth value — உண்மை மதிப்பு

U

Union — கூட்டு
Union, Generalised — பொதுவாக்கப்பட்ட கூட்டு
Union set — கூட்டுக் கணம்
Unique — தனித்த
Unit set — ஓருறுப்புக் கணம்
Universe of Discourse — முழுமைக் கணம்

V

Value — மதிப்பு
Variable — மாறி
Vector — திசையி
Vector Addition — திசையிக் கூட்டல்
Vector Multiplication — திசையிப் பெருக்கல்